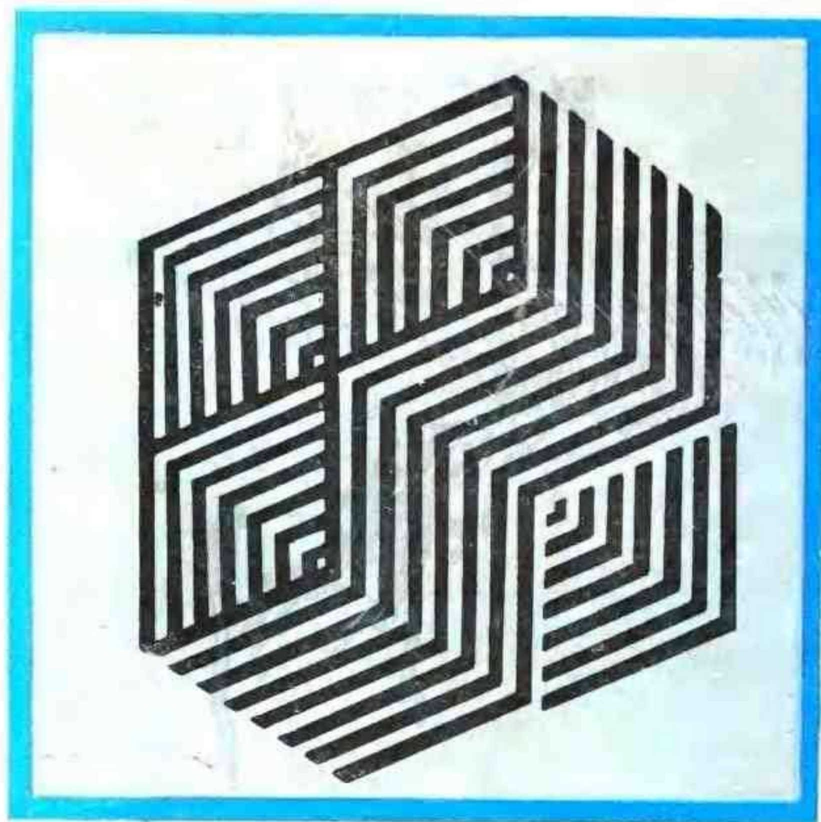
现代数学研究丛书

主编 刘应明

亚纯函数的正规族

顾永兴



四川教育出版社

现代数学研究丛书

亚纯函数的正规族

四川教育出版社

责任编辑：何伍鸣
封面设计：何一兵

现代数学研究丛书

亚纯函数的正规族　　顾永兴　著

四川教育出版社出版发行　（成都盐道街三号）
四川省新华书店经销　四川新华印刷厂印刷

开本850×1168毫米1/32　印张8.25　插页4 字数180千
1991年6月第一版　1991年6月第一次印刷
印数：1—720册

ISBN7—5408—1479—9/G·1430　定价：5.75元

序

全纯函数与亚纯函数的正规族理论是复分析的一个重要组成部分. 从P.Montel引进正规族，它便与函数取值的问题紧密地联系在一起，以后的发展也是如此. 在证实正规定则时，函数值分布论常常起着关键的作用.

正规族也是复分析里的一个有力工具. 例如从80年代初开始十分活跃并且正在蓬勃发展的复动力系统，就以正规族作为一个极其基本的概念.

法国著名数学家A. Bloch曾注意到：如果开平面上的一个全纯（或亚纯）函数满足某条件即蜕化为一常数，则在区域内一族全纯(或亚纯)函数一致地满足该条件时应该是一正规族. 简单地说，即相应于一Liouville-Picard型定理，必有一正规定则. 人们常常凭借这条Bloch法则从已知的Liouville-Picard型定理来猜测新的正规定则. 值得高兴的是以往所预言的关于正规定则的问题，近年来都相继得到解决与证实. 人们进一步发现对于一个正规定则，还往往相应地存在一条奇异方向. 在这方面也已出现了很多研究成果.

顾永兴教授多年从事正规族理论及相关问题的研究，成果卓著.特别地，他对亚纯函数证实了Miranda定则，颇受国内外同行注目.在这本书里，他主要论述了全纯函数与亚纯函数的正规族理论，同时对函数值分布论，奇异方向等作了扼要的论述.此书取材适当，论证严谨，是复分析方面的佳作.如能认真研读，定会受益不浅.

杨 乐

1988年11月

前言

众所周知，平面上任一无限点集至少存在一个聚点（有穷或无穷），这就是点集的列紧性．但一族函数就未必具有上述性质．本世纪初，P. Montel 引进了正规族的概念．他把具有某种列紧性的函数族称为正规族，并且利用模函数建立了判定函数族正规的一个基本定则："设 $\{f(z)\}$ 为区域D内一全纯函数族，若对于族中每个 $f(z)$ 在D内恒有 $f(z)\neq 0,1$，则族 $\{f(z)\}$ 在D内正规．"值得注意的是这个定则把函数族的正规性与函数的取值问题联系了起来．Nevanlinna 理论的产生促进了正规族理论的深入发展．在应用 Nevanlinna 基本定理重新证明了上述正规定则后不久，C. Miranda 又使用Nevanlinna理论证实了P. Montel 的如下重要猜想："设 $\{f(z)\}$ 为区域D内一全纯函数族，若对于族中每个$f(z)$在D内恒有$f(z)\neq 0$，$f^{(k)}(z)\neq 1$，则族 $\{f(z)\}$ 在D内正规．"人们称此为 Miranda 定则．该定则的重要意义在于它把函数族的正规性与函数的导函数的取值问题联系了起来，从而开辟了正规族理论的新的研究领域．近年

来，自从作者把 Miranda 正规定则推广到亚纯函数族的情形后，关于亚纯函数族正规定则的研究，在我国颇为活跃．到目前为止，有关全纯与亚纯函数族的正规定则的 Hayman[2] 猜想已全部被证实，其中不少是我国数学工作者的成果．

正规族理论内容丰富，本书[1]着重介绍正规定则的研究，其中包含了Hayman提出的关于正规定则猜想的全部证明．第一章简要介绍Nevanlinna理论的基本内容．第二章论述全纯函数族的正规定则，包含了 Montel、Miranda 及由 G. Valiron、庄圻泰和作者推广了的正规定则，还包含了涉及重值的正规定则．第三章介绍亚纯函数族的正规定则，其中所建立的正规定则绝大部分是属于我国数学工作者的工作．第四章研究对应于正规定则的奇异方向的存在性问题．需要特别指出的是，这一研究领域具有我国的特色．它首先由杨乐着手研究，这方面的成果都是近年来国内数学工作者的工作．

对于本书的主要部分（即前三章），只要读者具备大学课程中复变函数方面的知识就可阅读．

书中一定存在不少错误，敬请读者批评指正．

顾永兴

1988年6月

1) 本书部分内容的撰写及本书初稿的修改，得到国家自然科学基金的资助。

目　　录

第一章 Nevanlinna基本定理

§1.1 Poisson-Jensen公式与特征函数

我们先给出 Poisson-Jensen公式，它在建立Nevanlinna基本定理时起着重要的作用.

定理1.1 设$f(z)$为圆$|z|<R(0<R\leqslant+\infty)$内的亚纯函数且不恒为零，又设$f(z)$在$|z|<\rho(0<\rho<R)$内的零点为$a_\lambda(\lambda=1,2,\cdots,h)$，极点为$b_\mu$ $(\mu=1,2,\cdots,k)$，其中每一零点或极点出现的次数与其级相同，则当$|z|<\rho$时，有

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|\,\mathrm{Re}\left(\frac{\rho e^{i\varphi}+z}{\rho e^{i\varphi}-z}\right)d\varphi - \sum_{\lambda=1}^{h}\log\left|\frac{\rho^2-\overline{a_\lambda}z}{\rho(z-a_\lambda)}\right| + \sum_{\mu=1}^{k}\log\left|\frac{\rho^2-\overline{b_\mu}z}{\rho(z-b_\mu)}\right| \tag{1.1}$$

证明 我们区分两种情形.

(1) 在圆周$|z|=\rho$上$f(z)$没有零点及极点. 置

$$F(z)=f(z)\cdot\frac{Q(z)}{P(z)}, \tag{1.2}$$

其中

$$P(z)=\prod_{\lambda=1}^{h}\frac{\rho(z-a_\lambda)}{\rho^2-\overline{a_\lambda}z},\qquad Q(z)=\prod_{\mu=1}^{k}\frac{\rho(z-b_\mu)}{\rho^2-\overline{b_\mu}z}.$$

(1.3)

显然，$F(z)$在$|z|<R$内亚纯而在圆$|z|\leqslant\rho$上$F(z)\neq0$，∞，且当$|z|=\rho$时，

$$|F(z)|=|f(z)|. \tag{1.4}$$

于是，$\log|F(z)|$在圆 $|z|\leqslant\rho$ 上调和，根据 Poisson 公式，当$|z|<\rho$时，

$$\log|F(z)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|F(\rho e^{i\varphi})|Re\left(\frac{\rho e^{i\varphi}+z}{\rho e^{i\varphi}-z}\right)d\varphi$$

(1.5)

由（1.4）、（1.2）及（1.5）式，即得（1.1）式.

（2）在圆周 $|z|=\rho$ 上 $f(z)$有零点或极点. 此时（1.1）式中的积分为广义积分. 设 $f(z)$在$|z|=\rho$ 上的零点为 $\rho e^{i\theta_1}, \rho e^{i\theta_2}$，…，$\rho e^{i\theta_s}$，极点为 $\rho e^{i\varphi_1}$，$\rho e^{i\varphi_2}$，…，$\rho e^{i\varphi_t}$. 显然，存在 ρ_1、ρ_2：$0<\rho_1<\rho<\rho_2<R$ 使得当 $\rho_1<|z|<\rho_2$时，

$$f(z)=\left\{\prod_{k=1}^{s}(z-\rho e^{i\theta_k})\right\}\times\left\{\prod_{j=1}^{t}(z-\rho e^{i\varphi_j})\right\}^{-1}\times g(z),$$

(1.9)

其中 $g(z)$在 $\rho_1<|z|<\rho_2$内全纯且无零点. 由此并注意到公式

$$\left|\log|e^{i\theta}-1|\right|=\log\frac{1}{|e^{i\theta}-1|}\leqslant\log\frac{2}{\pi}+\log|\theta|$$

$$\left(0<|\theta|\leqslant\frac{\pi}{3}\right)$$

可知（1.1）式中的广义积分是有意义的. 现在再证（1.1）式当$|z|<\rho$ 时仍成立. 任取定点 z：$|z|<\rho$ 且 $z\neq a_\lambda, b_\mu$. 再任取值

$r<\rho$，使$|z|$、$|a_\lambda|$及$|b_\mu|$均小于r（$\lambda=1,2,\cdots,h,\mu=1,2,\cdots,k$）．根据情形（1），有

$$\log|f(z)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})|Re\left(\frac{re^{i\varphi}+z}{re^{i\varphi}-z}\right)d\varphi$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{h}\log\left|\frac{r^2-\bar{a}_\lambda z}{r(z-a_\lambda)}\right|+\sum_{\mu=1}^{k}\log\left|\frac{r^2-\bar{b}_\mu z}{r(z-b_\mu)}\right|$$

(1.7)

在上式中令$r\to\rho$并注意到关系式

$$\left|\log|te^{i\theta}-1|\right|<\log\frac{1}{|e^{i\theta}-1|}+\log2\quad(0<|\theta|\leqslant\frac{\pi}{3},0<t<1),$$

即得（1.1）式．至此定理证毕．

当$f(0)\neq0,\infty$时，在（1.1）式中令$z=0$就得

$$\log|f(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|d\varphi-\sum_{\lambda=1}^{h}\log\frac{\rho}{|a_\lambda|}$$

$$+\sum_{\mu=1}^{k}\log\frac{\rho}{|b_\mu|}.\qquad(1.8)$$

公式（1.8）称为Jensen公式．

下面将Jensen公式变形．为此引进一些记号．

定义1.1

$$\log^+x=\begin{cases}\log x, & x\geqslant1,\\ 0, & 0\leqslant x<1.\end{cases}$$

我们称$\log^+x$为x的正对数．显然当$x>0$时，$\log x=\log^+x-\log^+\frac{1}{x}$．于是

$$\log|f|=\log^+|f|-\log^+\left|\frac{1}{f}\right|\qquad(1.9)$$

我们用 $n(r,\frac{1}{f})$ 及 $n(r,f)$ 分别表示 $f(z)$ 在圆 $|z|\leqslant r(0\leqslant r<R)$ 上的零点个数及极点个数（一个 m 级的零点或极点算作 m 个零点或极点）．因

$$\sum_{\lambda=1}^{h}\log\frac{\rho}{|a_\lambda|}=\int_{r_0}^{\rho}\left(\log\frac{\rho}{t}\right)dn\left(t,\frac{1}{f}\right),$$

其中 r_0 为一适当小的正数．再利用分部积分，就有

$$\sum_{\lambda=1}^{h}\log\frac{\rho}{|a_\lambda|}=\int_0^{\rho}\frac{n(t,1/f)}{t}dt. \tag{1.10}$$

同理

$$\sum_{\mu=1}^{k}\log\frac{\rho}{|b_\mu|}=\int_0^{\rho}\frac{n(t,f)}{t}dt. \tag{1.11}$$

利用（1.9）、（1.10）及（1.11）式，Jensen 公式（1.8）可改写为

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(\rho e^{i\varphi})|d\varphi+\int_0^{\rho}\frac{n(t,f)}{t}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{1}{f(\rho e^{i\varphi})}\right|d\varphi+\int_0^{\rho}\frac{n(t,1/f)}{t}dt+\log|f(0)|. \tag{1.12}$$

在（1.12）式中我们假定了 $f(0)\neq0,\ \infty$。若 $z=0$ 为 $f(z)$ 的零点或极点，则在 $z=0$ 的某邻域内，有

$$f(z)=c_sz^s+c_{s+1}z^{s+1}+\cdots\qquad(c_s\neq0) \tag{1.13}$$

若令

$$g(z)=z^{-s}f(z),$$

则 $g(z)$为$|z|<R$ 内的亚纯函数，且 $g(0)=c_s\neq 0,\infty$. 另外

$$n(r,\frac{1}{g})=n(r,\frac{1}{f})-n(0,\frac{1}{f}),\quad n(r,g)=n(r,f)-n(0,f),$$

$$\tag{1.14}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g(\rho e^{i\varphi})|d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|d\varphi-s\log\rho,\tag{1.15}$$

$$s=n(0,\frac{1}{f})-n(0,f).\tag{1.16}$$

应用（1.12）式于$g(z)$，再利用（1.9）、(1.14)、(1.15)及（1.16）式，就得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(\rho e^{i\varphi})|d\varphi+\int_0^{\rho}\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt+n(0,f)\log\rho$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{1}{f(\rho e^{i\varphi})}\right|d\varphi+\int_0^{\rho}\frac{n(t,1/f)-n(0,1/f)}{t}dt+n(0,\frac{1}{f})\log\rho+\log|c_s|.\tag{1.17}$$

这是 Jensen 公式的一般形式，它包含了（1.12）式.

定义1.2 $$m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\varphi})|d\varphi,$$

$m(r,f)$ 也记为 $m(r,\infty)$，$m(r,\frac{1}{f-a})$ 也记为 $m(r,a)$.

$$N(r,f)=\int_0^r\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt+n(0,f)\log r,$$

$N(r,f)$ 称为$f(z)$的极点的密指量，也记为 $N(r,\infty)$. $N(r,\frac{1}{f-a})$

称为 $f(z)$的a-值点的密指量，也记为 $N(r,a)$。

于是 Jensen 公式（1.17）可写为

$$m(r,f)+N(r,f)=m\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\log|c_s|. \qquad (1.18)$$

定义1.3 $T(r,f)=m(r,f)+N(r,f)$.

R.Nevanlinna 称 $T(r,f)$为函数$f(z)$的特征函数. 这样，Jensen 公式又可写为

$$T(r,f)=T\left(r,\frac{1}{f}\right)+\log|c_s|. \qquad (1.19)$$

以下我们指出 $T(r,f)$的几个性质. 为此先证明公式

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|a-e^{i\theta}|d\theta=\log^+|a| \qquad (1.20)$$

其中a为任意一个复数.

事实上，若 $a=0$，（1.20）式显然成立. 今设 $a\neq 0$，并考虑 $\varphi(z)=a-z$. 根据（1.8）式，

$$\log|a|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\varphi(e^{i\theta})|d\theta \quad (|a|\geqslant 1),$$

$$\log|a|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\varphi(e^{i\theta})|\,d\theta-\log\frac{1}{|a|} \quad (|a|<1).$$

由此即得（1.20）式.

根据（1.20）式及 Fubini 积分交换定理，我们可给出 Cartan[1] 恒等式：

定理1.3 设 $f(z)$在$|z|<R$ 内亚纯且 $f(0)\neq\infty$，则当$0<r<R$时，

$$T(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N\left(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\right)d\theta+\log^+|f(0)|. \qquad (1.21)$$

证明 应用（1.12）式于函数 $f(z)-e^{i\theta}$，其中θ为一实数使

$e^{i\theta}\neq f(0)$，得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})-e^{i\theta}|d\varphi=N(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}})-N(r,f)$$
$$+\log|f(0)-e^{i\theta}|.$$

在上式中固定 r，并对 θ 求积分，得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\pi}\log\left|f(re^{i\theta})-e^{i\theta}\right|d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}})d\theta$$
$$-N(r,f)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(0)-e^{i\theta}|d\theta \qquad (1.22)$$

而由（1.20）式及积分交换定理，可有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})-e^{i\theta}|d\varphi$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})-e^{i\theta}|d\theta$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\varphi})|d\varphi=m(r,f),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(0)-e^{i\theta}|d\theta=\log^+|f(0)|.$$

将这二式代入（1.22）即得（1.21）式.

若 $z=0$ 为 $f(z)$的 s 级极点，则应用（1.16）式有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})-e^{i\theta}|d\varphi=N(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}})-N(r,f)$$
$$+\log|c_{-s}|,$$

其中 c_{-s} 为（1.13）式中的系数.

仿上，得公式

$$T(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N\left(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\right)d\theta+\log|c_{-s}|. \tag{1.23}$$

从 (1.22) 与 (1.23) 式，我们可得到特征函数 $T(r,f)$ 的如下性质：

定理1.4 设 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 内亚纯，则 $f(z)$ 的特征函数 $T(r,f)$ 为 r 的非减函数，且为 $\log r$ 的凸函数.

证明 根据 (1.22) 及 (1.23) 式，我们只需证明 $N(r,g)$ 为 r 的非减函数，且为 $\log r$ 的凸函数，其中 $g(z)=\frac{1}{f(z)-e^{i\theta}}$，$\theta$ 任意固定. $N(r,g)$ 的非减性是显然的. 现证明 $N(r,g)$ 为 $\log r$ 的凸函数. 任取 r 的三个值 r_1、r_2、r_3，使 $0<r_1<r_2<r_3<R$，我们有

$$N(r_2,g)-N(r_1,g)=\int_{r_1}^{r_2}\frac{n(t,g)-n(0,g)}{t}dt+n(0,f)\log\frac{r_2}{r_1}$$

$$=\int_{r_1}^{r_2}\frac{n(t,f)}{t}dt\leqslant n(r_2,f)\log\frac{r_2}{r_1}.$$

同理

$$N(r_3,f)-N(r_2,f)\geqslant n(r_2,f)\log\frac{r_3}{r_2}.$$

由上面两式，可得

$$N(r_2,g)\leqslant\frac{\log\frac{r_3}{r_2}}{\log\frac{r_3}{r_1}}N(r_1,g)+\frac{\log\frac{r_2}{r_1}}{\log\frac{r_3}{r_1}}N(r_3,g).$$

这表明 $N(r,g)$ 为 $\log r$ 的凸函数.

下面再给出特征函数的几个不等式. 我们先指出关于正对数

的几个性质．设 $a_1, a_2, \cdots, a_p$ 为任意 p 个有穷复数，则

$$\log^+|a_1a_2\cdots a_p| \leqslant \sum_{j=1}^{p}\log^+|a_j|, \tag{1.24}$$

$$\log^+|a_1+a_2+\cdots+a_p| \leqslant \sum_{j=1}^{p}\log^+|a_j| + \log p \tag{1.25}$$

事实上，当 $|a_1a_2\cdots a_p|<1$ 时，(1.24) 式显然成立．当 $|a_1a_2\cdots a_p|\geqslant 1$ 时，

$$\log^+|a_1a_2\cdots a_p| = \log|a_1a_2\cdots a_p| = \sum_{j=1}^{p}\log|a_j| \leqslant \sum_{j=1}^{p}\log^+|a_j|,$$

故 (1.24) 式同样成立．另外，

$$\log^+|a_1+\cdots+a_p| \leqslant \log^+(|a_1|+\cdots+|a_p|)$$

$$\leqslant \log^+(p\cdot \max_{1\leqslant j\leqslant p}|a_j|)$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{p}\log^+|a_j| + \log p.$$

这表示 (1.25) 式也成立．

从 (1.24) 与 (1.25) 式，我们可得

定理1.5 设 $f_j(z)$ $(j=1,\cdots,p)$ 为圆 $|z|<R$ $(0<R\leqslant\infty)$ 内 p 个亚纯函数，$f_j(0)\neq\infty$ $(j=1,\cdots,p)$，则

$$T(r,f_1f_2\cdots f_p) \leqslant \sum_{j=1}^{p}T(r,f_j) \quad (0<r<R), \tag{1.26}$$

$$T(r,f_1+\cdots+f_p) \leqslant \sum_{j=1}^{p}T(r,f_j)+\log p \quad (0<r<R). \tag{1.27}$$

证明 根据 (1.24) 及 (1.25) 式，

$$m(r,f_1\cdots f_p)\leqslant\sum_{j=1}^{p}m(r,f_j)\quad(0<r<R),\qquad(1.28)$$

$$m(r_1,f_1+\cdots+f_p)\leqslant\sum_{j=1}^{p}m(r,f_j)+\log p\quad(0<r<R).$$

(1.29)

另外，当 $0<r<R$ 时，易验证

$$n(r,f_1f_2\cdots f_p)\leqslant\sum_{j=1}^{p}n(r,f_j).\qquad(1.30)$$

$$n(r,f_1+f_2+\cdots f_p)\leqslant\sum_{j=1}^{p}n(r,f_j)\qquad(1.31)$$

由（1.28）～（1.31）式即得（1.26）及（1.27）式.

注 在定理1.5中若去掉$f_j(0)\neq\infty$的条件，则从$N(r,f)$的定义不难看出，当$R>1$时，(1.26)与(1.27)式于$1\leqslant r<R$成立。

当$f(z)$为全纯函数时，若令

$$M(r,f)=\max_{|z|=r}|f(z)|,$$

则$T(r,f)$与$\log^+M(r,f)$有如下关系：

定理1.6 设 $f(z)$在$|z|<R$内全纯，则

$$T(r,f)\leqslant\log^+M(r,f)\leqslant\frac{\rho+r}{\rho-r}T(\rho,f)\,(0<r<\rho<R).\quad(1.32)$$

证明 因

$$N(r,f)=0,\ T(r,f)=m(r,f),$$

故（1.32）式中，前一个不等式显然成立. 对于（1.32）式中的后一个不等式，根据 Poisson-Jensen 公式（1.1），当$|z|=r$时，有

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\rho e^{i\varphi})| \mathrm{Re}\left(\frac{\rho e^{i\varphi}+z}{\rho e^{i\varphi}-z}\right) d\varphi$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{h} \log\left|\frac{\rho^2-\overline{a_\lambda} z}{\rho(z-a_\lambda)}\right|.$$

取点 ζ 使 $|\zeta|=r$，且 $|f(\zeta)|=M(r,f)$. 注意到

$$0<\mathrm{Re}\left(\frac{\rho e^{i\varphi}+\zeta}{\rho e^{i\varphi}-\zeta}\right)\leqslant\frac{\rho+r}{\rho-r},$$

即有

$$\log^+M(r,f)=\log^+|f(\zeta)|\leqslant\frac{\rho+r}{\rho-r}m(r,f)=\frac{\rho+r}{\rho-r}T(\rho,f).$$

§1.2 Nevanlinna 第一基本定理与第二基本定理

在建立了 Jensen 公式及引进了特征函数后，我们来证明下面的 Nevanlinna 第一基本定理.

定理1.7 设 $f(z)$ 为 $|z|<R(0<R\leqslant+\infty)$ 内的一个非常数亚纯函数. 若 a 为任一有穷值，则当 $o<r<R$ 时，有

$$T\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=T(r,f)+h(a,r), \tag{1.33}$$

其中

$$|h(a,r)|\leqslant|\log|c_s||+\log^+|a|+\log 2,$$

$$f(z)-a=c_sz^s+c_{s+1}z^{s+1}+\cdots\quad(c_s\neq0).$$

证明 由 Jensen 公式 (1.19)，有

$$T(r,f-a)=T\left(r,\frac{1}{f-a}\right)+\log|c_s|\quad(0<r<R).\quad(1.34)$$

另外，

$$|m(r,f-a)-m(r,f)|\leqslant\log^+|a|+\log 2,$$

$$N(r,f-a)=N(r,f),$$

故

$$|T(r,f-a)-T(r,f)|\leqslant\log^+|a|+\log 2.\qquad(1.35)$$

由（1.34）及（1.35）式即得（1.33）式.

推论 设 $f(z)$ 为圆 $|z|<R$ 内的一个非常数亚纯函数. 又设 $F(z)=\dfrac{af(z)+b}{cf(z)+d}$，其中 a,b,c,d 为常数，且 $ad-bc\neq 0$，则

$$T(r,F)=T(r,f)+O(1)\quad(0<r<R).$$

证明 先设 $c\neq 0$. 因 $f(z)$ 可用 $F(z)$ 表为

$$f(z)=\frac{-dF+b}{cF-a},$$

故只需证明

$$T(r,F)\leqslant T(r,f)+O(1)\quad(0<r<R).\qquad(1.36)$$

事实上，

$$T(r,F)=T\left(r,\frac{a}{c}+\frac{\frac{b}{c}-\frac{ad}{c^2}}{f+\frac{d}{c}}\right)$$

$$\leqslant\log^+\left|\frac{a}{c}\right|+\log^+\left|\frac{b}{c}-\frac{ad}{c^2}\right|+T\left(r,\frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right)$$

$$+\log 2.$$

再应用第一基本定理于 $T\left(r,\dfrac{1}{f+\frac{d}{c}}\right)$，即得（1.36）式.

若 $c=0$，显然推论成立.

下面我们再给出特征函数 $T(r,f)$ 的两个性质.

定理1.8 若 $f(z)$为$|z|<\infty$内的非常数亚纯函数，则

$$\lim_{r\to\infty} T(r,f) = \infty. \tag{1.37}$$

证明 若 $f(0)=\infty$，则由 $N(r,f)$ 的定义可知

$$\lim_{r\to\infty} N(r,f) = +\infty.$$

再由 $T(r,f) \geqslant N(r,f)$ 即得 (1.37) 式. 若 $f(0)\neq\infty$，

令 $a=f(0)$，$g(z)=\dfrac{1}{f(z)-a}$，则 $g(0)=\infty$，故

$$\lim_{r\to\infty} T(r,g) = +\infty$$

再应用Nevanlinna第一基本定理于$g(z)$，就知 (1.37) 式成立.

定理1.9 设 $f(z)$在$|z|<\infty$内亚纯，则 $f(z)$ 为超越亚纯函数（即非有理函数）的充要条件是

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{\log r} = +\infty. \tag{1.38}$$

证明 先证条件是必要的. 分三种情形：

(1) $f(z)$ 没有极点. 这时 $f(z)$ 为超越整函数，因此，在展式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

中有无穷多个系数不为零，根据 Cauchy 不等式，有

$$|a_n| r^n \leqslant M(r,f) \quad (r>0,\ n=0,\ 1,\ \cdots),$$

故对每个正整数 p，有

$$\lim_{r\to\infty}\frac{M(r,f)}{r^p}=+\infty.$$

从而

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log M(r,f)}{\log r}=+\infty.$$

再在（1.32）式中取 $\rho=2r$，得

$$\log^+ M(r,f)\leqslant 3T(2r,f).$$

由此可得（1.38）式.

（2）$f(z)$有无穷多个极点．根据 $N(r,f)$ 的定义，当$r\geqslant 1$时，有

$$N(r^2,f)\geqslant N(r^2,f)-N(r,f)\geqslant n(r,f)\log r,$$

因此

$$\lim_{r\to\infty}\frac{N(r,f)}{\log r}=+\infty.$$

故也有（1.38）式.

（3）$f(z)$ 有有穷多个极点 $b_j(j=1,2,\cdots,k)$，它们出现的次数与其级相同．置

$$P(z)=\prod_{j=1}^{k}(z-b_j),\quad g(z)=P(z)f(z).$$

显然 $g(z)$为整函数，又因 $f(z)$为超越亚纯函数，故 $g(z)$ 为超越整函数．根据情形（1），有

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T(r,g)}{\log r}=+\infty.$$

另外，由（1.27）式，当 $r\geqslant 1$时，

$$T(r,g)\leqslant T(r,P)+T(r,f).$$

再注意对多项式 P，有

$$T(r,P)=O(\log r)$$

就知（1.38）式成立.

至于条件的充分性则是显然的. 事实上，若 $f(z)$ 为有理函数，那么 $m(r,f)=O(\log r)$ ，$N(r,f)=O(\log r)$ ，因此 $T(r,f)=O(\log r)$. 从而与条件（1.38）矛盾.

现在我们来证明 Nevanlinna 第二基本定理. 先证一个引理，这个引理今后也是常用的.

引理1.2 设 $f_1(z)$，$f_2(z)$在$|z|<R$ $(0<R\leqslant+\infty)$内亚纯，则当 $0<r<R$时，

$$N(r,f_1f_2)-N\left(r,\frac{1}{f_1f_2}\right)=N(r,f_1)+N(r,f_2)-N\left(r,\frac{1}{f_1}\right)-N\left(r,\frac{1}{f_2}\right). \tag{1.39}$$

证明 设 $f_1(z)$，$f_2(z)$在$z=0$的邻域内的展式分别为

$$f_1(z)=C'_{s_1}z^{s_1}+C'_{s_1+1}z^{s_1+1}+\cdots \quad (C'_{s_1}\neq 0),$$

$$f_2(z)=C''_{s_2}z^{s_2}+C''_{s_2+1}z^{s_2+1}+\cdots \quad (C''_{s_2}\neq 0)$$

于是，$f_1(z)f_2(z)$在$z=o$ 的邻域内的展式为

$$f_1(z)f_2(z)=C'_{s_1}C''_{s_2}z^{s_1+s_2}+C_{s_1+s_2+1}z^{s_1+s_2+1}+\cdots$$

根据 Jensen 公式（1.17），有

$$N(r,f_1f_2)-N\left(r,\frac{1}{f_1f_2}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{|f_1(re^{i\varphi})f_2(re^{i\varphi})|}d\varphi+\log|C'_{s_1}C''_{s_2}|$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{|f_1(re^{i\varphi})|}d\varphi+\log|C'_{s_1}|$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{|f_2(re^{i\varphi})|}d\varphi+\log|C''_{s_2}|$$

$$=N(r,f_1)-N\left(r,\frac{1}{f_1}\right)+N(r,f_2)-N\left(r,\frac{1}{f_2}\right).$$

下面定理是第二基本定理的特殊形式.

定理1.10 设函数 $f(z)$ 于 $|z|<R$ $(0<R\leqslant+\infty)$ 亚纯且 $f(0)\neq0$, 1, ∞ 及 $f'(0)\neq0$, 则当 $0<r<R$ 时, 有

$$T(r,f)\leqslant N(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f-1}\right)-N_1(r)+S(r),\tag{1.40}$$

其中

$$N_1(r)=2N(r,f)-N(r,f')+N\left(r,\frac{1}{f'}\right),$$

$$S(r)=m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+m\left(r,\frac{f'}{f-1}\right)+\log\left|\frac{f(0)(f(0)-1)}{f'(0)}\right|$$
$$+\log2$$

证明 根据恒等式

$$\frac{1}{f}=1-\frac{f'}{f}\frac{f-1}{f'},$$

当 $0<r<R$ 时, 有

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)\leqslant m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+m\left(r,\frac{f-1}{f'}\right)+\log2.\tag{1.41}$$

应用 Jensen 公式 (1.19), 有

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)=T(r,f)-N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\log\frac{1}{|f(0)|},\tag{1.42}$$

$$m\left(r,\frac{f-1}{f'}\right)=m\left(r,\frac{f'}{f-1}\right)+N\left(r,\frac{f'}{f-1}\right)-N\left(r,\frac{f-1}{f'}\right)$$

$$+\log\left|\frac{f(0)-1}{f'(0)}\right|. \qquad (1.43)$$

另外，应用引理1.2，有

$$N\left(r,\frac{f'}{f-1}\right)-N\left(r,\frac{f-1}{f'}\right)=N(r,f')+N\left(r,\frac{1}{f-1}\right)$$

$$-N(r,f-1)-N\left(r,\frac{1}{f'}\right). \qquad (1.44)$$

由 (1.41) ～ (1.44) 式就得 (1.40) 式.

上述定理的条件 $f(0)\neq 0,1,\infty$ 及 $f'(0)\neq 0$ 可以去掉. 此时，当 $f(z)$ 不恒为常数时，读者从上述定理的证明过程中所应用的 Jensen 公式可看出，只需把余项 $S(r)$ 中的项 $\log\left|\frac{f(0)-1}{f'(0)}\right|$ 加以适当改变即可.

我们再给出 Nevanlinna 第二基本定理的一般形式，为此先建立一个引理.

引理1.3 设函数 $f(z)$ 于 $|z|<R$ $(0<R\leqslant+\infty)$ 亚纯. 又设 a_j $(j=1,2,\cdots,q)$ 为 q $(\geqslant 2)$ 个互相判别的有穷复数. 若 $f(0)\neq 0,\infty$ 及 $f'(0)\neq 0$，则当 $0<r<R$ 时，有

$$m(r,f)+\sum_{j=1}^{q}m\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)\leqslant 2T(r,f)-N_1(r)+S^*(r), \qquad (1.45)$$

其中

$$N_1(r)=2N(r,f)-N(r,f')+N\left(r,\frac{1}{f'}\right),$$

$$S^*(r)=m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+m\left(r,\sum_{j=1}^{q}\frac{f'}{f-a_j}\right)+q\log^+\frac{2q}{\delta}+\log 2$$

$$+\log\frac{1}{|f'(0)|},$$

$$\delta=\min_{1\le i<j\le q}|a_i-a_j|$$

证明 置

$$F(z)=\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{f(z)-a_j}.$$

我们先证

$$m(r,F)\geqslant\sum_{j=1}^{q}m\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)-q\log^+\frac{2q}{\delta}-\log 2. \tag{1.46}$$

事实上，任意固定值 r，置

$$E_\nu=\left\{\theta:|f(re^{i\theta})-a_\nu|<\frac{\delta}{2q},\ 0\leqslant\theta<2\pi\right\},$$

$$E=\bigcup_{\nu=1}^{q}E_\nu.$$

设$\theta\in E$，不妨设$\theta\in E_\nu$. 于是，当$j\neq\nu$时，

$$|f(re^{i\theta})-a_j|\geqslant|a_j-a_\nu|-|f(re^{i\theta})-a_\nu|\geqslant\delta\left(1-\frac{1}{2q}\right).$$

从而，由

$$F(re^{i\theta})=\frac{1}{f(re^{i\theta})-a_\nu}\left\{1+\sum_{j\neq\nu}\frac{f(re^{i\theta})-a_\nu}{f(re^{i\theta})-a_j}\right\}$$

可得

$$|F(re^{i\theta})|>\frac{1}{|f(re^{i\theta})-a_\nu|}\left\{1-(q-1)\frac{\frac{\delta}{2q}}{\delta\left(1-\frac{1}{2q}\right)}\right\}$$

$$>\frac{1}{2|f(re^{i\theta})-a_j|}$$

注意 $E_j\cap E_\nu$ 为空集 $(j\neq\nu)$，因而有

$$\log^+|F(re^{i\theta})|>\log^+\frac{1}{|f(re^{i\theta})-a_\nu|}-\log 2$$

$$\geqslant\sum_{j=1}^{q}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\theta})-a_j|}-q\log^+\frac{2q}{\delta}-\log 2.\quad(1.47)$$

显然，当 $\theta\in E$ 时，(1.47) 式仍成立. 因此 (1.46) 式成立.

我们再求 $m(r,F)$ 的一个上界.

$$m(r,F)\leqslant m(r,f'F)+m\left(r,\frac{1}{f'}\right)$$

$$=m(r,f'F)+T(r,f')-N\left(r,\frac{1}{f'}\right)+\log\frac{1}{|f'(0)|}.$$

(1.48)

而

$$T(r,f')=m(r,f')+N(r,f')$$

$$\leqslant m(r,f)+m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+N(r,f')$$

$$=T(r,f)+m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+N(r,f')-N(r,f).$$

(1.49)

由 (1.46)，(1.48) 及 (1.49) 式，即得 (1.45) 式.

由引理1.3立即可证 Nevanlinna 第二基本定理的一般形式.

定理1.11 设函数 $f(z)$ 于 $|z|<R$ $(0<R\leqslant+\infty)$ 亚纯. 又设 $a_j(j=1,2,\cdots,q)$ 为 $q(\geqslant 3)$ 个互相判别的复数 (有穷或无穷). 若 $f(0)\neq 0,\ \infty,\ a_j(j=1,2,\cdots,q)$ 及 $f'(0)\neq 0$，则

$$(q-2)T(r,f)\leqslant\sum_{j=1}^{q}N\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)-N_1(r)+S(r),\quad(1.50)$$

其中

$$N_1(r)=2N(r,f)-N(r,f')+N\left(r,\frac{1}{f'}\right),$$

另外，当 $a_j(j=1,2,\cdots,q)$ 均为有穷时，

$$S(r)=m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+m\left(r,\sum_{j=1}^{q}\frac{f'}{f-a_j}\right)+K,$$

$$K=(q+1)\log2+q\log^+\frac{2q}{\delta}+\log\frac{1}{|f'(0)|}+\sum_{j=1}^{q}\log^+|a_j|$$

$$+\sum_{j=1}^{q}\log|f(0)-a_j|,$$

$$\delta=\min_{1\leq i<j\leq q}|a_i-a_j|.$$

当 $a_j(j=1,2,\cdots,q)$ 中有一个为无穷，不妨设 a_q 为无穷，这时余项 $S(r)$ 中的 $m\left(r,\sum_1^q\frac{f'}{f-a_j}\right)$ 改为 $m\left(r,\sum_1^{q-1}\frac{f'}{f-a_j}\right)$，而 K 中出现的 q 均用 $q-1$ 代替.

证明 先设 $a_1,\cdots,a_q$ 均有穷. 根据 (1.45) 式，

$$\sum_{j=1}^{q}m\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)\leqslant2T(r,f)-N_1(r)+S^*(r).$$

于是，

$$\sum_{j=1}^{q}T\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)-2T(r,f)$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{q} N\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)-N_1(r)+S^*(r). \tag{1.51}$$

另外，由 Jensen 公式（1.19）知

$$T\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)=T(r,f-a_j)+\log\frac{1}{|f(0)-a_j|}$$

$$\geqslant T(r,f)-\log 2-\log^+|a_j|+\log\frac{1}{|f(0)-a_j|}$$

$$(j=1,\cdots,q). \tag{1.52}$$

由（1.51）及（1.52）式，即得（1.50）式.

若 $a_q=\infty$，则仿上，从（1.45）式出发可得（1.50）式. 至此定理证毕.

注　在上述定理中，若去掉条件$f(0)\neq 0$，∞，a_j及$f'(0)\neq 0$，(1.50)式仍成立，其中只需将常数K加以适当改变.

上述 Nevanlinna 第二基本定理指出：亚纯函数的特征函数可被亚纯函数的密指量所界囿. 而用亚纯函数及其导数的密指量去界囿其特征函数的问题，首先是由 H. Milloux[1] 考虑的. 这就是通常称为 Milloux 不等式的如下定理：

定理1.21　设函数 $f(z)$于$|z|<R$（$0<R\leqslant+\infty$）亚纯. 若$f(0)\neq 0$，∞及 $f^{(k)}(0)\neq 1$，$f^{(k+1)}(0)\neq 0$，则当$0<r<R$ 时，有

$$T(r,f)<\overline{N}(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)^{1)}$$

$$-N\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)$$

$$+m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)$$

1)　今后，$\overline{N}(r,f)$表示$|z|\leqslant r$上$f(z)$的极点的精简密指量(即不计重数).

$$+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)$$

$$-\log\left|\frac{f(0)(f^{(k)}(0)-1)}{f^{(k+1)}(0)}\right|+\log 2$$

证明 根据 Bureau 恒等式

$$\frac{1}{f}=\frac{f^{(k)}}{f}-\frac{f^{(k)}-1}{f^{(k+1)}}\frac{f^{(k+1)}}{f},$$

有

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)\leqslant m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)$$

$$+m\left(r,\frac{f^{(k)}-1}{f^{(k+1)}}\right)+\log 2.$$

再分别应用 Jensen 公式（1.19）式于 $m\left(r,\frac{1}{f}\right)$ 及 $m\left(r,\frac{f^{(k)}-1}{f^{(k+1)}}\right)$，就有

$$T(r,f)\leqslant N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)-N\left(r,\frac{f^{(k)}-1}{f^{(k+1)}}\right)$$

$$+m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)$$

$$+\log\left|\frac{f(0)(f^{(k)}(0)-1)}{f^{(k+1)}(0)}\right|+\log 2.$$

而由引理1.2，上式右端中

$$N\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)-N\left(r,\frac{f^{(k)}-1}{f^{(k+1)}}\right)$$

$$=N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)+N(r,f^{(k+1)})-N(r,f^{(k)})$$

$$-N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right),$$

再注意到 $N(r,f^{(k+1)})-N(r,f^{(k)})=\overline{N}(r,f)$，即得定理结论.

§1.3 对数导数

本节考虑 $m\left(r,\frac{f'}{f}\right)$ 及 $m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)$ 的增长问题，即后面的定理1.13与定理1.13′. 定理1.13本质上是由 R.Nevanlinna[1] 给出的. 现在这个较为精确的形式是 G.Valiron[2] 得到的，我们通常称为 Nevanlinna 引理. 定理1.13′是定理1.13的推广，它是由熊庆来[1] 给出的. 这两个定理在本书研究正规定则时，起着重要的作用.

在证定理1.13之前，先建立一个引理.

引理1.4 设 $f(z)$ 于 $|z|\leqslant\rho$ 上亚纯且不恒为零. 又设 $f(z)$ 在 $|z|<\rho$ 内的零点与极点分别为 $a_\lambda(\lambda=1,\cdots,h)$ 与 $b_\mu(\mu=1,\cdots,k)$，其中每一零点或极点出现的次数与级相同. 则当 $|z|<\rho$ 时，有

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(\rho e^{i\varphi})\right|\frac{2\rho e^{i\varphi}}{(\rho e^{i\varphi}-z)^2}d\varphi$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{h}\frac{\rho^2-|a_\lambda|^2}{(z-a_\lambda)(\rho^2-\overline{a}_\lambda z)}-\sum_{\mu=1}^{k}\frac{\rho^2-|b_\mu|^2}{(z-b_\mu)(\rho^2-\overline{b}_\mu z)}. \tag{1.53}$$

证明 任取定点 z_0：$|z_0|<\rho$，使 $f(z_0)\neq0,\infty$. 于是存在 z_0 的一个邻域 $\delta(z_0)$：$|z-z_0|<d$，使在 $\delta(z_0)$ 内 $f(z)\neq0,\infty$. 因

此在 $\delta(z_0)$ 内存在 $f(z)$ 的单值解析的对数分支 $\log f(z)$. 再根据 Poisson-Jensen 公式 (1.1), 就知在 $\delta(z_0)$ 内恒有

$$\log f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|\frac{\rho e^{i\varphi}+z}{\rho e^{i\varphi}-z}d\varphi$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{h}\log\frac{\rho^2-\bar{a}_\lambda z}{\rho(z-a_\lambda)}+\sum_{\mu=1}^{k}\log\frac{\rho^2-\bar{b}_\mu z}{\rho(z-b_\mu)}+iC,$$

(1.54)

其中右端各对数均为 $\delta(z_0)$ 内单值解析的分支, C 为一实常数.

将 (1.54) 式两边对 z 求导, 就得 (1.53) 式在 $\delta(z_0)$ 内处处成立. 因 (1.53) 式的两端均为 $|z|<\rho$ 内的亚纯函数, 故由唯一性定理可知, (1.53) 式在 $|z|<\rho$ 内处处成立.

定理1.13 设 $f(z)$ 于 $|z|<R$ $(0<R\leqslant+\infty)$ 亚纯且 $f(0)\neq 0,\infty$, 则当 $0<r<\rho<R$ 时, 有

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)<4\log^+T(\rho,f)+3\log^+\frac{1}{\rho-r}+4\log^+\rho+2\log^+\frac{1}{r}$$

$$+4\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+16. \tag{1.55}$$

证明 根据引理1.4, 在 $|z|<\rho$ 内, 有

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\leqslant\frac{2\rho}{(\rho-|z|)^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log|f(\rho e^{i\varphi})|\right|d\varphi$$

$$+\sum_{\lambda=1}^{h}\frac{\rho^2-|a_\lambda|^2}{|z-a_\lambda||\rho^2-\bar{a}_\lambda z|}$$

$$+\sum_{\mu=1}^{k}\frac{\rho^2-|b_\mu|^2}{|z-b_\mu||\rho^2-\bar{b}_\mu z|}.$$

而

$$\frac{\rho^2-|a_\lambda|^2}{|z-a_\lambda||\rho^2-\bar{a}_\lambda z|}$$

$$=\frac{\rho(\rho^2-|a_\lambda|^2)}{|\rho^2-\overline{a}_\lambda z|^2}\left|\frac{\rho^2-\overline{a}_\lambda z}{\rho(z-a_\lambda)}\right|$$

$$\leqslant\frac{\rho}{(\rho-|z|)^2}\left|\frac{\rho^2-\overline{a}_\lambda z}{\rho(z-a_\lambda)}\right|,$$

同理，

$$\frac{\rho^2-|b_\mu|^2}{|z-b_\mu|\,|\rho^2-\overline{b}_\mu z|}\leqslant\frac{\rho}{(\rho-|z|)^2}\left|\frac{\rho^2-\overline{b}_\mu z}{\rho(z-b_\mu)}\right|.$$

于是，

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\leqslant\frac{2\rho}{(\rho-|z|)^2}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log|f(\rho e^{i\varphi})|\right|d\varphi\right.$$

$$\left.+\sum_{\lambda=1}^{h}\left|\frac{\rho^2-\overline{a}_\lambda z}{\rho(z-a_\lambda)}\right|+\sum_{\mu=1}^{k}\left|\frac{\rho^2-\overline{b}_\mu z}{\rho(z-b_\mu)}\right|\right\} \tag{1.56}$$

由 Jensen 公式（1.19），得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log|f(\rho e^{i\varphi})|\right|d\varphi$$

$$=m(\rho,f)+m\left(\rho,\frac{1}{f}\right)$$

$$\leqslant 2T(\rho,f)+\log\frac{1}{|f(0)|}. \tag{1.57}$$

另外，若令

$$g_a(z)=\frac{\rho^2-\overline{a}z}{\rho(z-a)}\qquad(0<|a|<\rho),$$

由 Jensen 公式（1.19），则有

$$T\big(r,g_a(z)\big)=T\left(r,\frac{1}{g_a(z)}\right)+\log\frac{\rho}{|a|}$$

$$= \log \frac{\rho}{|a|} \qquad (0<r<\rho)$$

再由

$$N\left(r, g_a(z)\right) = \log^+ \frac{r}{|a|},$$

便得

$$m\left(r, g_a(z)\right) = \log \frac{\rho}{|a|} - \log^+ \frac{r}{|a|}. \tag{1.58}$$

由（1.56）与（1.57）式，有

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \frac{2\rho}{(\rho-|z|)^2}\left\{2T(\rho, f) + \log\frac{1}{|f(0)|} + \sum_{\lambda=1}^{h}\left|g_{a_\lambda}(z)\right|\right.$$

$$\left. + \sum_{\mu=1}^{k}\left|g_{b_\mu}(z)\right|\right\}.$$

在上式中令 $z=re^{i\theta}$ $(0<r<\rho)$，并在两端取正对数后，对 θ 由 0 到 2π 积分，得

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leqslant \log^+ \frac{2\rho}{(\rho-r)^2} + \log^+\left(2T(r, f)\right)$$

$$+ \log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|} + \sum_{\lambda=1}^{h} m\left(r, g_{a_\lambda}(z)\right)$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{k} m\left(r, g_{b_\mu}(z)\right) + \log\left\{n\left(\rho, \frac{1}{f}\right)\right.$$

$$\left. + n(\rho, f) + 2\right\}.$$

再由（1.58）、（1.10）及（1.11）式，有

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leqslant \log^+ \frac{2\rho}{(\rho-r)^2} + \log^+ 2T(\rho, f) + \log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}$$

$$+N\left(\rho,\frac{1}{f}\right)-N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N(\rho,f)-N(r,f)$$

$$+\log\left\{n\left(\rho,\frac{1}{f}\right)+n(\rho,f)+2\right\} \qquad (1.59)$$

设 ρ_1: $0<\rho_1<\rho$ 为一待定数. 显然, (1.59) 式用 ρ_1 代 ρ 时仍成立:

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)\leqslant\log^+\frac{2\rho}{(\rho_1-r)^2}+\log^+2T(\rho_1 f)$$

$$+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+N\left(\rho_1,\ \frac{1}{f}\right)$$

$$-N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N(\rho_1,f)-N(r,f)$$

$$+\log\left\{n\left(\rho_1,\ \frac{1}{f}\right)+n(\rho_1,f)+2\right\}. \qquad (1.60)$$

令

$$n(r)=n\left(r,\frac{1}{f}\right)+n(r,f)\quad(0<r<R),$$

$$N(r)=N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N(r,f)=\int_0^r\frac{n(t)}{t}dt. \qquad (1.61)$$

下面我们估计 $n(\rho_1)$ 与 $N(\rho_1)-N(r)$. 因

$$n(\rho_1)\log\frac{\rho}{\rho_1}\leqslant\int_{\rho_1}^{\rho}\frac{n(t)}{t}dt\leqslant N(\rho)$$

$$\leqslant T(\rho,f)+T\left(\rho,\ \frac{1}{f}\right)=2T(\rho,f)$$

$$+\log\frac{1}{|f(0)|},$$

$$\log\frac{\rho}{\rho_1}=-\log\left(1-\frac{\rho-\rho_1}{\rho}\right)\geqslant\frac{\rho-\rho_1}{\rho},$$

故

$$n(\rho_1)\leqslant\frac{\rho}{\rho-\rho_1}\left\{2T(\rho,f)+\log^+\frac{1}{|f(0)|}\right\},$$

$$\log n(\rho_1)\leqslant\log\frac{\rho}{\rho-\rho_1}+\log^+2T(\rho,f)$$

$$+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+\log 2. \qquad (1.62)$$

另外，因 $N(r)$为 $\log r$ 的凸函数，故

$$N(\rho_1)-N(r)\leqslant\frac{\log\frac{\rho_1}{r}}{\log\frac{\rho}{r}}\left\{N(\rho)-N(r)\right\}$$

$$\leqslant\frac{\log\frac{\rho_1}{r}}{\log\frac{\rho}{r}}N(\rho)$$

$$\leqslant\frac{\log\frac{\rho_1}{r}}{\log\frac{\rho}{r}}\left\{2T(\rho,f)+\log^+\frac{1}{|f(0)|}\right\}.$$

而

$$\log\frac{\rho_1}{r}=\log\left(1+\frac{\rho_1-r}{r}\right)\leqslant\frac{\rho_1-r}{r},$$

$$\log\frac{\rho}{r}\geqslant\frac{\rho-r}{\rho},$$

因此

$$N(\rho_1)-N(r)\geqslant\frac{\rho}{r}\frac{\rho_1-r}{\rho-r}\left\{2T(\rho,f)+\log^+\frac{1}{|f(0)|}\right\}.$$

(1.63)

取 ρ_1为

$$\rho_1-r=\frac{r(\rho-r)}{2\left\{T(\rho,f)+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+1\right\}\rho+1},$$

(1.64)

于是 $r<\rho_1<\rho$，且由 (1.63) 知

$$N(\rho_1)-N(r)<1. \qquad (1.65)$$

另外，易验证

$$\frac{1}{\rho_1-r}=\frac{1}{\rho-r}\frac{1}{r}\left\{2\left[T(\rho,f)+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+1\right]\rho+1\right\},$$

(1.66)

$$\begin{aligned}\rho-\rho_1&=(\rho-r)-(\rho_1-r)\\&=(\rho-r)\left\{1-\frac{r}{2\left[T(\rho,f)+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+1\right]\rho+1}\right\}\\&>\frac{1}{2}(\rho-r).\end{aligned} \qquad (1.67)$$

由 (1.60) 、 (1.61) 、 (1.62) 、 (1.65)、(1.66)及(1.67)式，便得 (1.55) 式.

注 在定理1.13中，若$z=0$为$f(z)$的零点或极点，则在$z=0$的邻域内$f(z)=c_s z^s+c_{s+1}z^{s+1}+\cdots(c_s\neq 0)$.

这时，我们有

推论 设 $f(z)$于$|z|<R(0<R\leqslant+\infty)$ 亚纯且不恒为零. 则当$0<r<\rho<R$时，有

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)<4\log^{+}T(\rho,f)+3\log^{+}\frac{1}{\rho-r}+8\log^{+}\rho$$

$$+6\log^{+}\frac{1}{r}+4\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|c_s|}+5\log^{+}|s|+25. \tag{1.68}$$

证明 命

$$f_1(z)=z^{-s}f(z).$$

应用定理1.13于 $f_1(z)$，当$0<r<\rho<R$ 时，有

$$m\left(r,\frac{f_1'}{f_1}\right)<4\log^{+}T(\rho,f_1)+3\log^{+}\frac{1}{\rho-r}+4\log^{+}\rho$$

$$+2\log^{+}\frac{1}{r}+4\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|c_s|}+16. \tag{1.69}$$

注意到 $\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}=-\frac{s}{z}+\frac{f'(z)}{f(z)}$，便有

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)\leqslant m\left(r,\frac{f_1'}{f_1}\right)+\log^{+}|s|+\log^{+}\frac{1}{r}+\log 2 \tag{1.70}$$

另外，因

$$m(r,f_1)\leqslant m(r,z^{-s})+m(r,f),$$

$$m(r,z^{-s})=\begin{cases} s\log^{+}\dfrac{1}{r} & (s>0), \\ -s\log^{+}r & (s<0), \end{cases}$$

$$N(r,f_1)=N(r,f)-n(0,f)\log r,$$

$$n(0,f)=\begin{cases}0 & (s>0),\\ -s & (s<0),\end{cases}$$

故

$$T(r,f_1)\leqslant T(r,f)+|s|\left(\log^+r+\log^+\frac{1}{r}\right). \qquad (1.71)$$

由（1.69）、（1.70）及（1.71）式，就有（1.68）式成立.

定理1.13′ 设 $f(z)$ 于 $|z|<R$ $(0<R\leqslant+\infty)$ 亚纯且 $f(0)\neq 0,\infty$. 又设 k 为任一正整数，则当 $0<r<\rho<R$ 时，有

$$m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)<K\left\{1+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+\log^+\frac{1}{r}\right.$$

$$\left.+\log^+\frac{1}{\rho-r}+\log^+\rho+\log^+T(\rho,f)\right\}, \qquad (1.72)$$

其中 K 为仅依赖于 k 的常数.

证明 我们对 k 用归纳法. 当 $k=1$ 时，由定理1.13可知，（1.72）式成立. 今设（1.72）式对 $k=1,2,\cdots,q-1$ 均成立，下面证明它对 $k=q$ 也成立.

任取定 r 与 ρ：$0<r<\rho<R$. 又设 $f(z)$在圆 $|z|<\rho$ 内的零点与极点分别为 $a_\lambda(\lambda=1,\cdots,h)$ 与 $b_\mu(\mu=1,\cdots,k)$，其中每一零点或极点出现的次数与级相同. 根据引理1.4的（1.53）式及如下估计式（下式中 a 表示a_λ 或 b_μ）：

$$\left|\frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}}\left\{\frac{\rho^2-|a|^2}{(z-a)(\rho^2-\bar{a}z)}\right\}\right|$$

$$=\left|\frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}}\left\{\frac{1}{z-a}+\frac{\bar{a}}{\rho^2-\bar{a}z}\right\}\right|$$

$$=(q-1)!\left|\frac{(-1)^{q-1}}{(z-a)^q}+\frac{\bar{a}^q}{(\rho^2-\bar{a}z)^q}\right|$$

$$\leqslant(q-1)!\left(\frac{1}{|z-a|^q}+\frac{\rho^q}{|\rho^2-\bar{a}z|^q}\right)$$

$$=(q-1)!\left|\frac{\rho^2-\bar{a}z}{\rho(z-a)}\right|^q$$

$$\times\left\{\frac{\rho^q}{|\rho^2-\bar{a}z|^q}+\frac{\rho^{2q}|z-a|^q}{|\rho^2-\bar{a}z|^{2q}}\right\}$$

$$\leqslant(q-1)!\left|\frac{\rho^2-\bar{a}z}{\rho(z-a)}\right|^q\left\{\frac{1}{(\rho-r)^q}+\frac{(2\rho)^q}{(\rho-r)^{2q}}\right\}$$

$$\leqslant(q-1)!\left|\frac{\rho^2-\bar{a}z}{\rho(z-a)}\right|^q\frac{2^{q+1}\rho^q}{(\rho-r)^{2q}}.$$

当 $|z|=r$ 时，就有

$$\left|\frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}}\left(\frac{f'}{f}\right)\right|=\left|\frac{q!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|\frac{2\rho e^{i\varphi}}{(\rho e^{i\varphi}-z)^{q+1}}d\varphi\right.$$

$$+\sum_{\lambda=1}^{h}\frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}}\left\{\frac{\rho^2-|a_\lambda|^2}{(z-a_\lambda)(\rho^2-\bar{a}_\lambda z)}\right\}$$

$$\left.-\sum_{\mu=1}^{k}\frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}}\left\{\frac{\rho^2-|b_\mu|^2}{(z-b_\mu)(\rho^2-\bar{b}_\mu z)}\right\}\right|$$

$$\leqslant q!\frac{2\rho}{(\rho-r)^{q+1}}\left\{2T(\rho,f)+\log^+\frac{1}{|f(0)|}\right\}$$

$$+\frac{2^{q+1}\rho^q q!}{(\rho-r)^{2q}}\left\{\sum_{\lambda=1}^{h}\left|\frac{\rho^2-\bar{a}_\lambda z}{\rho(z-a_\lambda)}\right|^q\right.$$

$$+\sum_{\mu=1}^{k}\left|\frac{\rho^2-\bar{b}_\mu z}{\rho(z-b_\mu)}\right|^q\Bigg\}. \tag{1.73}$$

因

$$\frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}}\left(\frac{f'}{f}\right)=\frac{f^{(q)}}{f}+P_q\left(\frac{f'}{f},\ \frac{f''}{f},\ \cdots,\ \frac{f^{(q-1)}}{f}\right),$$

其中 P_q 为 q 次多项式，故

$$\log^+\left|\frac{f^{(q)}}{f}\right|\leqslant K'\left\{\sum_{j=1}^{q-1}\log^+\left|\frac{f^{(j)}}{f}\right|+1\right\}$$

$$+\log^+\left|\frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}}\left(\frac{f'}{f}\right)\right|,$$

其中 K' 为仅依赖于 q 的常数.

再结合归纳假设及（1.73）式，就得

$$m\left(r,\frac{f^{(q)}}{f}\right)<K''\Bigg\{1+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+\log^+\frac{1}{r}$$

$$+\log^+\rho+\log^+\frac{1}{\rho-r}+\log^+T(\rho,f)$$

$$+q\sum_{\lambda=1}^{h}m\left(r,g_{a_\lambda}(z)\right)+q\sum_{\mu=1}^{k}m\left(r,g_{b_\mu}(z)\right)$$

$$+\log^+\left\{n\left(\rho,\frac{1}{f}\right)+n(\rho,f)\right\}\Bigg\}, \tag{1.74}$$

其中 $g_a(z)=\dfrac{\rho^2-\bar{a}z}{\rho(z-a)}$，$K''$为仅依赖于 q 的常数.

另外，由（1.58）、（1.10）及（1.11）式知

$$\sum_{\lambda=1}^{h} m\left(r, g_{a_\lambda}(z)\right) + \sum_{\mu=1}^{k} m\left(r, g_{b_\mu}(z)\right)$$
$$= N\left(\rho, \frac{1}{f}\right) + N(\rho, f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) - N(r, f). \tag{1.75}$$

再取 ρ_1，使

$$\rho_1 - r = \frac{r(\rho - r)}{2\left\{T(\rho, f) + \log^+ \frac{1}{|f(0)|} + 1\right\}\rho + 1}, \tag{1.76}$$

并仿照定理1.13的证明过程中，从（1.60）式开始的处理方法，便知（1.72）式对 $k=q$ 也成立．从而定理得证．

注 在定理1.13′中，如果去掉条件 $f(0) \neq 0, \infty$，那么当$f(z) \not\equiv 0$ 时，在 $z=0$ 的邻域内

$$f(z) = c_s z^s + c_{s+1} z^{s+1} + \cdots \qquad (c_s \neq 0).$$

这时，命

$$g(z) = \frac{f(z)}{z^s},$$

就有 $g(0) \neq 0, \infty$．另外，$f^{(k)}(z)$又可表为 $g(z)$，$g'(z)$，…，$g^{(k)}(z)$的线性组合．因此应用定理1.13′于 $g(z)$仍可得（1.72）式，其中$\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}$换为 $\log^+\log^+\frac{1}{|c_s|}$．

第二章　全纯函数的正规族

§2.1　定义及简单性质

定义2.1　设 $f_n(z)$ $(n=1, 2, \cdots)$为一函数序列均在一区域 D 内全纯. 我们称$f_n(z)$ 在D上内闭一致收敛，如果$f_n(z)$ 在D内任一有界闭域上一致收敛. 此时，根据 Weierstrass 的一个定理，这函数序列的极限函数在D内全纯.

定义2.2　设 $f_n(z)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 为一函数序列均在一区域D内全纯. 我们称$f_n(z)$ 在D上内闭一致趋于无穷，如果$f_n(z)$ 在D内任一有界闭域上一致趋于无穷.

定义2.3　设 $\{f(z)\}$ 为区域 D 内的一族全纯函数. 如果从这个族中每一个函数序列 $f_n(z)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 均可以选出一个子序列 $f_{n_k}(z)$ $(k=1, 2, \cdots)$ 在区域 D 上内闭一致收敛或内闭一致趋于无穷，则称族 $\{f(z)\}$ 在区域 D内正规. 显然，在区域 D 内正规的全纯函数族 $\{f(z)\}$ 在D的任一子区域内仍正规.

定义2.4　设 $\{f(z)\}$ 为区域 D 内的一族全纯函数. 我们称族 $\{f(z)\}$ 在区域 D内一点z_0正规，如果存在一个属于 D 的以z_0为心的圆 C: $|z-z_0|<r$，使族 $\{f(z)\}$ 在 C 内正规.

为了建立定义2.3与定义2.4之间的关系，我们证明两个引

理.

引理2.1 设$f_n(z)$ $(n=1, 2, \cdots)$为区域D的全纯函数序列. 若对D内任一点z，总有一邻域$C(z)$，使$f_n(z)$在$C(z)$上一致收敛或一致趋于无穷，则$f_n(z)$在D上内闭一致收敛或内闭一致趋于无穷.

证明 任取定一点$z_0\in D$,根据引理条件存在一邻域$C(z_0)$使$f_n(z)$在$C(z_0)$上一致收敛或一致趋于无穷，若是前者，则由区域D的连通性，引理条件及Heine-Borel定理可知，对D内每一点都有一邻域，使$f_n(z)$在此邻域上一致收敛，又根据Heine-Borel定理，立即推出$f_n(z)$在D上内闭一致收敛；若是后者，可以证明$f_n(z)$在D上内闭一致趋于无穷.

引理2.2 设D为任一区域，则必存在一列有界区域D_k $(k=1, 2, \cdots)$使$\overline{D}_k\subset D$, $D_k\subset D_{k+1}(k=1, 2\cdots)$且$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}D_k=D$.

证明 若区域D为整个开平面，定理结论显然成立.今设D的边界非空. 属于D的一切有理点记为z_1, z_2, z_3, $\cdots$, z_k, $\cdots$, G_k是以z_k为心，以z_k到D的边界之距离的一半为半径的圆内部，d_k是任一包含点z_k及z_{k+1}的有界区域且$\overline{d}_k\subset D$ $(k=1, 2, \cdots)$. 最后，我们置$D_1=G_1\cup d_1\cup G_2$, $D_2=D_1\cup d_2\cup G_3$, $D_3=D_2\cup d_3\cup G_4$, $\cdots$, $D_k=D_{k-1}\cup d_k\cup G_{k+1}$, $\cdots$, 不难验证D_1, D_2, $\cdots$, D_k, $\cdots$满足引理的要求.

现在我们建立下面的定理.

定理2.1 设$\{f(z)\}$为区域D内的全纯函数族. 这个族在D内正规的充要条件是它在D内的每一点正规.

证明 条件的必要性是显然的. 现证条件的充分性. 设$f_n(z)$ $(n=1, 2, \cdots)$为族$\{f(z)\}$中任一函数序列，根据引

理2.2，存在一列有界区域 D_k：$\overline{D_k}\subset D$，$D_k\subset D_{k+1}$（$k=1$，2，…）使 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}D_k=D$. 我们先考虑 D_1. 根据定理条件，对 $\overline{D_1}$ 中每一点 z 总存在属于 D 的一个圆 $C(z)$：$|z-z_0|<r$ 使 $\{f(z)\}$ 在 $C(z)$ 正规. 记 $C^*(z)$ 为半径缩小一半的同心圆，于是 $\bigcup\limits_{z\in\overline{D}_1}C^*(z)$ 为闭集 $\overline{D_1}$ 的开覆盖，根据 Heine-Borel 定理，存在有限个 $C^*(z_i)$（$i=1$，2，…，m）覆盖 $\overline{D_1}$，由正规性从 $f_n(z)$（$n=1$，2，…）中可选出子序列 $f_{n1}(z)$（$n=1$，2，…）在每个 $C^*(z_i)$ 上一致收敛或一致趋于无穷，根据引理2.1 $f_{n1}(z)$ 在 D_1 上内闭一致收敛或内闭一致趋于无穷. 同理，从 $f_{n1}(z)$（$n=1$，2，…）中又可选出子序列 $f_{n2}(z)$（$n=1,2,\cdots$）在 D_2 上内闭一致收敛或内闭一致趋于无穷，如此继续下去，可取出对角线函数序列 $f_{11}(z)$，$f_{22}(z)$，…，$f_{nn}(z)$，…. 顾及 $D_k\subset D_{k+1}$（$k=1$，2，…）可知，这个序列或者在每个 D_k 上均内闭一致收敛或者在每个 D_k 上均内闭一致趋于无穷，再根据 Heine-Borel 定理，它在 D 上或者内闭一致收敛或者内闭一致趋于无穷.

定义2.5 设 $\{f(z)\}$ 为区域 D 内的一族全纯函数. 我们称族 $\{f(z)\}$ 在区域 D 上内闭一致有界，如果 $\{f(z)\}$ 在属于 D 的任一有界闭域上一致有界.

定理2.2 设 $\{f(z)\}$ 为区域 D 内的全纯函数族，若这个族在 D 上内闭一致有界，则这个族在区域 D 内正规.

证明 根据定理2.1，我们只需证明 $\{f(z)\}$ 在 D 内每点都正规. 设 z_0 为 D 内任意一点，取正数 R 使圆 C：$|z-z_0|\leqslant R$

属于区域 D，并记 C^* 为圆 $|z-z_0|\leqslant\frac{R}{2}$. 根据定理条件，存在正数 M，使 $|f(z)|\leqslant M$ $(f\in\{f(z)\},\ z\in C)$，利用 Cauchy 不等式，当 $z\in C^*$ 时，$|f'(z)|\leqslant\frac{2}{R}M$ $(f\in\{f(z)\})$.

今设 $f_n(z)(n=1,2,\cdots)$ 为族 $\{f(z)\}$ 中的任一函数序列，属于圆 C^* 的一切有理点记为 $z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n,\ \cdots$，使用对角线序列方法（参照定理2.1的证明），从序列 $f_n(z)$ $(n=1,2,\cdots)$ 中可选出子序列 $f_{nn}(z)(n=1,2,\cdots)$ 使它在每一点 $z_j(j=1,2,\cdots)$ 处均收敛．以下我们证明序列 $f_{nn}(z)(n=1,2,\cdots)$ 在 C^* 上一致收敛．

对任意正数 ε，首先存在有限个有理点 $z_1,z_2,\cdots z_k$，使 $C^*\subset\bigcup\limits_{i=1}^{k}(|z-z_i|<\frac{R}{6M}\varepsilon)$. 另外存在自然数 N，当 $n,\ m\geqslant N$ 时，有

$$\left|f_{nn}(z_i)-f_{mm}(z_i)\right|<\frac{\varepsilon}{3}\qquad(i=1,2,\cdots,k)$$

对任一点 $z\in C^*$，必有点 z_j $(1\leqslant j\leqslant k)$ 使 $|z-z_j|<\frac{R}{6M}\varepsilon$. 于是

$$|f_{nn}(z)-f_{mm}(z)|\leqslant|f_{nn}(z)-f_{nn}(z_j)|+|f_{nn}(z_j)-f_{mm}(z_j)|+|f_{mm}(z_j)-f_{mm}(z)|$$

$$<|z-z_j|\cdot\max_{\zeta\in C^*}|f'(\zeta)|+\frac{\varepsilon}{3}+|z-z_j|\cdot\max_{\zeta\in C^*}|f'(\zeta)|<\varepsilon.$$

这个定理的逆定理虽然不成立，但我们有

定理2.3 设全纯函数族 $\{f(z)\}$ 在区域 D 内正规，且族

$\{f(z)\}$ 在某点 $z_0\in D$ 有界，则族 $\{f(z)\}$ 在 D 上内闭一致有界.

证明　假定结论不存立，即存在某一有界闭域 $\overline{G}\subset D$，一点列 $z_n\in\overline{G}$ $(n=1, 2, \cdots)$ 及一函数序列 $f_n(z)\in\{f(z)\}$ $(n=1, 2, \cdots)$，使

$$|f_n(z_n)|\geqslant n \qquad (n=1, 2, \cdots). \tag{2.1}$$

根据定理条件，从序列 $f_n(z)(n=1, 2, \cdots)$ 中可选出子序列 $f_{n_k}(z)$ $(k=1, 2, \cdots)$ 在 D 上内闭一致收敛，故 $f_{n_k}(z)$ $(k=1, 2, \cdots)$ 在 $\overline{G}$ 上一致有界，这与 (2.1) 式矛盾.

从定理2.2可得

定理2.4　设 $\{f(z)\}$ 为区域 D 内一全纯函数族。若存在正数 K，使对 $\{f(z)\}$ 中任一函数 $f(z)$，在 D 内均恒有 $|f(z)|\geqslant K$，则族 $\{f(z)\}$ 在 D 内正规.

证明　根据定理2.2，族 $\left\{\frac{1}{f(z)}\right\}$ 在 D 内正规. 于是，对于族 $\{f(z)\}$ 中任一函数序列 $f_n(z)$ $(n=1, 2, \cdots)$，可选出子序列 $f_{n_k}(z)$ $(k=1, 2, \cdots)$，使 $\frac{1}{f_{n_k}(z)}$ 在 D 上内闭一致收敛于全纯函数 $g(z)$. 若 $g(z)$ 不恒为零，则根据Rouche定理，$g(z)$ 在 D 内无零点，因此，$f_{n_k}(z)$ 在 D 上内闭一致趋于全纯函数 $\frac{1}{g(z)}$. 若 $g(z)$ 恒为零，则 $f_{n_k}(z)$ 在 D 上内闭一致趋于无穷. 至此证明了族 $\{f(z)\}$ 在 D 内是正规的.

关于正规族，我们再给出几个简单性质.

定理2.5　设 $\{f(z)\}$ 为区域 D 内一全纯函数族，其中每个函数 $f(z)\neq 0$ $(z\in D)$. 又设 D 的一子集 E 在 D 内没有聚点.

若 $\{f(z)\}$ 在$D-E$内正规，则族 $\{f(z)\}$ 在D内也正规.

证明　根据定理2.1，只需证族 $\{f(z)\}$ 在E中每个点正规. 设z_0为E中任一点，作圆C：$|z-z_0|<r$使$C\subset D$且$C\cap E=\{z_0\}$. 又设$f_n(z)$ $(n=1,2,\cdots)$ 为族 $\{f(z)\}$ 中任一函数序列，由于族 $\{f(z)\}$ 在$0<|z-z_0|<r$内正规，故可从序列$f^n(z)$中选出一子列$f_{n_k}(z)$ $(k=1,2,\cdots)$ 在$0<|z-z_0|<r$上内闭一致收敛或内闭一致趋于无穷. 若是前者，则注意到$f_{n_k}(z)$

在C内的全纯性易推得$f_{n_k}(z)$ 在C上内闭一致收敛；若是后者，

则于D内全纯的函数列$\dfrac{1}{f_{n_k}(z)}$在$0<|z-z_0|<r$上内闭一致趋

于零，因而$\dfrac{1}{f_{n_k}(z)}$在C上也内闭一致趋于零，即$f_{n_k}(z)$ 在C上

内闭一致趋于无穷. 至此证明了族 $\{f(z)\}$ 在点z_0正规.

定理2.6　设全纯函数族 $\{f(z)\}$ 在区域D内正规，则族 $\{af(z)+b\}$ 也在D内正规 $(a\neq 0)$.

这个性质是显然的.

定理2.7　设 $\{f(z)\}$ 为圆域$|z|<R$内一全纯函数族. 若存在正数A，使对任一$f\in\{f(z)\}$及任一点z_0 $(|z_0|<\frac{R}{4})$ 恒有[1]

$$\log^{+}M\left(\frac{R}{2},\ z_0,f\right)\leqslant A\left(1+\left|\log|f(z_0)|\right|\right),\qquad(2.2)$$

1) 今后用$M(r,z_0,f)$，$m(r,z_0,f)$，$n(r,z_0,f)$，$N(r,z_0,f)$及$T(r,z_0,f)$表示$f(z)$对于圆$|z-z_0|=r$的M,m,n,N及T.

则族 $\{f(z)\}$ 在 $|z|<\frac{R}{4}$ 内正规.

证明 对任一 $f(z)\in\{f(z)\}$，我们区分两种情形.

1° 在圆 $|z|<\frac{R}{4}$ 内或者恒有 $|f(z)|<1$，或者恒有 $|f(z)|>1$.

2° 在圆 $|z|<\frac{R}{4}$ 内存在一点 z_0，使 $|f(z_0)|=1$. 于是由 (2.2) 式，得 $\log^+ M\left(\frac{R}{2}, z_0, f\right)\leqslant A$. 又因 $\left(|z|<\frac{R}{4}\right)\subset\left(|z-z_0|<\frac{R}{2}\right)$，故在圆 $|z|<\frac{R}{4}$ 内 $|f(z)|\leqslant e^A$. 再根据定理 2.2 及 2.4，族 $\{f(z)\}$ 在 $|z|<\frac{R}{4}$ 内正规.

§2.2 Montel定则与 Miranda定则

从本节起，我们将推导出一系列关于全纯（亚纯）函数族的正规定则. Montel[1]首先建立了一个极为基本的正规定则. 为了证明这个正规定则. 我们需要几个引理. 这几个引理今后也是经常要用到的.

引理2.3 当 $a>e$ 及 $x>0$ 时，有

$$\log x + a\log^+\log^+\frac{1}{x} \leqslant a(\log a - 1) + \log^+ x. \qquad (2.3)$$

证明 若 $x > \frac{1}{e}$，则有$\log^+\log^+\frac{1}{x} = 0$，故不等式（2.3)自然成立。若 $x \leqslant \frac{1}{e}$，不等式（2.3）可改写成

$$\log x + a\log\log\frac{1}{x} \leqslant a\ (\log a - 1)\ .$$

考虑函数

$$\varphi(t) = a\log t - t - a(\log a - 1)\quad (t > 0).$$

当 $t > a$ 时，$\varphi'(t) < 0$，当$t < a$ 时，$\varphi'(t) > 0$，另外$\varphi(a) = 0$，由此可知

$$\varphi(t) \leqslant 0 \qquad (t > 0).$$

在上式中以 $\log\frac{1}{x}$ 代替 t 即获得不等式（2.3）.

下面的引理是Borel[1]，Bureau[1]及Milloux[1]的工作.

引理2.4 设$U(r)$是区间$0 < r < \rho$内的非负并且非减的函数.设 a 及 b 均为正数，使 $b \geqslant 2a$ 且 $b \geqslant 8a^2$. 若不等式

$$U(r) < a\log^+ U(R) + a\log\frac{R}{R-r} + b \qquad (2.4)$$

于 $0 < r < R < \rho$ 成立，则不等式

$$U(r) < 2a\log\frac{R}{R-r} + 2b \qquad (2.5)$$

于 $0 < r < R < \rho$ 成立.

证明 首先证明如下不等式

$$e^{\frac{b}{a}}x > 8a\log x + 8b \quad (x \geqslant 2). \qquad (2.6)$$

考虑辅助函数

$$\varphi(x)=e^{\frac{b}{a}}x-8a\log x-8b.$$

根据条件 $b\geqslant 8a^2$，我们有

$$2e^{\frac{b}{a}}>2\left(1+\frac{b}{a}+\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\right)>\left(1+\frac{b}{a}\right)^2$$

$$>8a\left(1+\frac{b}{a}\right)=8a+8b. \tag{2.7}$$

从 (2.7) 式，立即有

$$\varphi(2)=2e^{\frac{b}{a}}-8a\log 2-8b>8a+8b-8a\log 2-8b>0, \tag{2.8}$$

且当 $x\geqslant 2$ 时，

$$\varphi'(x)=e^{\frac{b}{a}}-\frac{8a}{x}>\frac{8a}{2}-\frac{8a}{x}\geqslant 0. \tag{2.9}$$

由 (2.8) 及 (2.9) 式，就有 (2.6) 式.

现在来证明引理2.4. 设 r 及 R 使

$$0<r<R<\rho,$$

并假定

$$U(r)\geqslant 2a\log\frac{R}{R-r}+2b. \tag{2.10}$$

以下我们证明 $r'=\frac{1}{2}(r+R)$ 及 R 也满足

$$U(r')\leqslant 2a\log\frac{R}{R-r'}+2b. \tag{2.11}$$

事实上，根据 (2.4) 式，有

$$U(r)<a\log^+U(r')+a\log\frac{r'}{r'-r}+b$$

$$<a\log^+U(r')+a\log\frac{R}{R-r'}+b. \qquad (2.12)$$

另外，(2.10) 式可写为

$$U(r)\geqslant 2a\log\frac{R}{R-r'}-2a\log 2+2b. \qquad (2.13)$$

由 (2.12) 及 (2.13) 式，得

$$\log^+U(r')>\log\frac{R}{R-r'}-2\log 2+\frac{b}{a}$$

$$=\log\left(\frac{1}{4}e^{\frac{b}{a}}\frac{R}{R-r'}\right)$$

而因 $b\geqslant 2a$，故 $\frac{1}{4}e^{\frac{b}{a}}\frac{R}{R-r'}>1$，因而

$$U(r')>\frac{1}{4}e^{\frac{b}{a}}\frac{R}{R-r'}. \qquad (2.14)$$

再根据不等式 (2.6)，有

$$e^{\frac{b}{a}}\frac{R}{R-r'}>8a\log\frac{R}{R-r'}+8b. \qquad (2.15)$$

由 (2.14) 及 (2.15) 式，即得 (2.11) 式.

现在置

$$r_0=r,\ r_n=\frac{1}{2}(r_{n-1}+R) \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

则对每一正整数 n，有

$$0<r_n<R<\rho \qquad (2.16)$$

及

$$U(r_n)\geqslant 2a\log\frac{R}{R-r_n}+2b. \qquad (2.17)$$

因 $U(r)$ 为非减函数，由 (2.16) 式知，$U(r_n)\leqslant U(R)$. 而由 (2.17)

式，$U(r_n)\to+\infty$ $(n\to+\infty)$，从而矛盾.

为了今后使用方便，我们在引理2.4的基础上建立下面引理.

引理2.5 设$U(r)$为一非负且非减的函数，定义在一区间$0<r<R$内，又设a，b及c均为正数，若不等式

$$U(r)<a\log^+U(\rho)+b\left(\log^+\frac{1}{\rho-r}+\log^+\rho+\log^+\frac{1}{r}\right)+c \tag{2.18}$$

于$0<r<\rho<R$成立，则当$0<r<R$时

$$U(r)<4(a+b)\left(\log\frac{R}{R-r}+\log^+R+\log^+\frac{1}{R}\right)+20(a+b+1)^2+2c. \tag{2.19}$$

证明 当$\frac{R}{2}\leqslant r<\rho<R$时，

$$U(r)<a\log^+U(\rho)+b\left(\log\frac{\rho}{\rho-r}+2\log^+\frac{2}{R}+\log^+R\right)+c$$

$$<(a+b)\log^+U(\rho)+(a+b)\log\frac{\rho}{\rho-r}+2b\times\left(\log^+\frac{1}{R}+\log^+R\right)+8(a+b+1)^2+c.$$

置

$$U^*(r)=\begin{cases}U(r) & \left(\frac{R}{2}\leqslant r<R\right),\\ 0 & \left(0<r<\frac{R}{2}\right).\end{cases}$$

应用引理2.4于$U^*(r)$，并令$\rho\longrightarrow R$，得

$$U^*(r)\leqslant 2(a+b)\log\frac{R}{R-r}+4b\left(\log^+\frac{1}{R}+\log^+R\right)$$

$$+16(a+b+1)^2+2c \qquad (2.20)$$

于$0<r<\rho<R$成立，特别有

$$U\left(\frac{R}{2}\right)=U^*\left(\frac{R}{2}\right)\leqslant 2(a+b)\log 2+4b$$

$$\times\left(\log^+\frac{1}{R}+\log^+R\right)+16(a+b+1)^2+2c$$

$$<4b\left(\log^+\frac{1}{R}+\log^+R\right)+20(a+b+1)^2+2c$$

由（2.20）及上式即得（2.19）式.

下面我们先叙述 Montel 定则. 这个定则 Montel 本人是用模函数方法证明的，我们应用 Nevanlinna 理论证明，这将在随后的 Miranda 定则的证明中统一进行.

定理2.8 设 $\{f(z)\}$ 为区域 D 内一全纯函数族. 若族 $\{f(z)\}$ 中每个函数 $f(z)$在 D 内满足$f(z)\neq 0$ 及$f(z)\neq 1$，则族 $\{f(z)\}$ 在 D 内正规.

Montel建立了正规族理论后不久就提出一个猜想：若把上述定则中的条件 $f(z)\neq 1$ 改为$f^{(k)}(z)\neq 1$ $(k\geqslant 1)$，其余条件不变，则族 $\{f(z)\}$ 仍正规. 对于这个问题，应用 Nevanlinna 理论后还存在的困难主要是如何消去原始值的问题. Bureau 对此有深入讨论，但只获得附有条件的结果. 1935年，Miranda [1]完全证实了这个猜想，我们称为 Miranda 正规定则：

定理2.9 设 $\{f(z)\}$ 为区域 D 内一全纯函数族，k 为一正整数. 若族 $\{f(z)\}$ 中的每个函数 $f(z)$ 在 D 内满足 $f(z)\neq 0$，$f^{(k)}(z)\neq 1$，则族 $\{f(z)\}$ 在 D 内正规.

Miranda 利用三个预备定理与四个引理，以避免原始值的的出现．方法巧妙但演算很复杂，后来 Valiron[1] 建立了一个界囿定理，虽然推证出了定理2.9，但仍基于 Miranda 的思想，演算仍较复杂，且界囿定理不够精确．熊庆来[2] 给出了一个简单的新证明，且建立的界囿定理的估计也是理想的．以下我们用熊庆来的方法把定理2.8与定理2.9统一起来证明，为此，先建立界囿定理：

定理2.10　设函数 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内全纯，且 $f(z)\neq 0$，$f^{(k)}(z)\neq 1$ $(k\geqslant 0,\ f^{(0)}\equiv f)$，则对于 $0<r<1$，有

$$\log M(r,f)<\frac{K}{1-r}\left\{\log^+|f(0)|+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+\log\frac{2}{1-r}\right\},\tag{2.21}$$

其中 K 为仅依赖于 k 的常数[1]．

证明　先设 $f^{(k+1)}(0)\neq 0$．根据Bureau 恒等式

$$\frac{1}{f}=\frac{f^{(k)}}{f}-\frac{f^{(k)}-1}{f^{(k+1)}}\cdot\frac{f^{(k+1)}}{f}$$

有

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)\leqslant m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k)}-1}{f^{(k+1)}}\right)+\log 2.$$

应用 Jensen 公式于 $m\left(r,\dfrac{f^{(k)}-1}{f^{(k+1)}}\right)$，得

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)\leqslant m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)$$

---

1) 今后，我们常用 K 表示正常数，但在不同式中出现时不一定相同。

$$+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)+\log\left|\frac{f^{(k)}(0)-1}{f^{(k+1)}(0)}\right|+\log 2.$$

(2.22)

根据定理1.13′，对于 $o<r<\rho'<\rho<1\left(其中\rho'=\frac{r+\rho}{2}\right)$有

$$m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)<K\left\{1+\log\frac{1}{r}+\log\frac{1}{\rho-r}\right.$$

$$\left.+\log^+T(\rho,f)+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}\right\},\qquad(2.23)$$

$$m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)<K\left\{1+\log\frac{1}{r}+\log\frac{1}{\rho-r}\right.$$

$$\left.+\log^+T(\rho,f)+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}\right\},\qquad(2.24)$$

$$m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)<K\left\{1+\log\frac{1}{r}+\log\frac{1}{\rho'-r}\right.$$

$$\left.+\log^+T(\rho',f^{(k)}-1)+\log^+\log^+\frac{1}{|f^{(k)}(0)-1|}\right\}$$

(2.25)

而

$$\begin{aligned}T(\rho',f^{(k)}-1)&\leqslant T(\rho',f^{(k)})+\log 2\\&\leqslant m\left(\rho',\frac{f^{(k)}}{f}\right)+m(\rho',f)+(k+1)\\&\quad\times N(\rho',f)+\log 2\\&\leqslant(k+1)T(\rho',f)+m\left(\rho',\frac{f^{(k)}}{f}\right)\\&\leqslant(k+1)T(\rho,f)+m\left(\rho',\frac{f^{(k)}}{f}\right).\end{aligned}$$

再应用定理 1.13′ 于 $m\left(\rho', \frac{f^{(k)}}{f}\right)$，得

$$m\left(\rho', \frac{f^{(k)}}{f}\right)<K\left\{1+\log\frac{1}{\rho'}+\log\frac{1}{\rho-\rho'}+\log^{+}T(\rho,f)\right.$$
$$\left.+\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f(0)|}\right\} \qquad (2.26)$$

由 (2.22) ～ (2.26) 及 (2.3) 式，就得

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)<K\left\{1+\log\frac{1}{r}+\log\frac{1}{\rho-r}+\log^{+}T(\rho,f)\right.$$
$$\left.+\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f(0)|}\right\}+\log^{+}|f^{(k)}(0)|$$
$$+\log^{+}\frac{1}{|f^{(k+1)}(0)|}.$$

对于上式中的 $\log^{+}|f^{(k)}(0)|$，有如下估计：

$$\log^{+}|f^{(k)}(0)|\leqslant\log^{+}\left|\frac{f^{(k)}(0)}{f(0)}\right|+\log^{+}|f(0)|$$
$$\leqslant m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+\log^{+}|f(0)|$$
$$<K\left\{1+\log\frac{1}{r}+\log\frac{1}{\rho-r}+\log^{+}T(\rho,f)\right.$$
$$\left.+\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f(0)|}\right\}+\log^{+}|f(0)|.$$

故

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)<K\left\{1+\log\frac{1}{r}+\log\frac{1}{\rho-r}+\log^{+}T(\rho,f)\right.$$
$$\left.+\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f(0)|}+\log^{+}|f(0)|\right\}$$

$$+\log^{+}\frac{1}{|f^{(k+1)}(0)|}$$

又根据 Jensen 公式及 (2.3) 式，有

$$T(r,f)<K\left\{1+\log\frac{1}{r}+\log\frac{1}{\rho-r}+\log^{+}|f(0)|+\log^{+}T(\rho,f)\right\}$$

$$+\log^{+}\frac{1}{|f^{(k+1)}(0)|}.$$

再根据引理2.5，当$0<r<1$时，

$$T(r,f)=m(r,f)<K\left\{1+\log\frac{1}{1-r}+\log^{+}|f(0)|\right.$$

$$\left.+\log^{+}\frac{1}{|f^{(k+1)}(0)|}\right\}.$$

结合不等式

$$\log M(r,f)\leqslant\frac{4}{1-r}m\left(\frac{1+r}{2},f\right),$$

就得

$$\log M(r,f)<\frac{K}{1-r}\left\{\log^{+}|f(0)|+\log^{+}\frac{1}{|f^{(k+1)}(0)|}\right.$$

$$\left.+\log\frac{2}{1-r}\right\} \qquad (2.26)$$

于$0<r<1$成立.

现在我们来消去 (2.26) 式中的原始值$f^{(k+1)}(0)$. 区分成两种情形：

(1) $|f^{(k+1)}(0)|\geqslant 1$. 此时,显然由 (2.26) 式得 (2.21) 式.

(2) $|f^{(k+1)}(0)|<1$. 任取定r，$<r0<1$.并取$\zeta=re^{ix}$，使$|f(\zeta)|=M(r,f)$. 此时，我们再区分为两种情形：

(2.1) 在$\overline{O\zeta}$上恒有$|f^{(k+1)}(z)|\leqslant 1$. 沿线段$\overline{Oz}$ ($z\in\overline{O\zeta}$) 依次对$f^{(k+1)}$, $f^{(k)}$, $\cdots$, f'积分，有

$$|f^{(k)}(z)|\leqslant|f^{(k)}(0)|+\left|\int_{\overline{Oz}}f^{(k+1)}(\zeta)d\zeta\right|\leqslant|f^{(k)}(0)|+1,$$

$$|f^{(k-1)}(z)|\leqslant|f^{(k-1)}(0)|+\left|\int_{\overline{Oz}}f^{(k)}(\zeta)d\zeta\right|$$

$$\leqslant|f^{(k-1)}(0)|+|f^{(k)}(0)|+1,$$

$$\cdots\cdots$$

$$|f(z)|\leqslant|f(0)|+\sum_{\nu=1}^{k}|f^{(\nu)}(0)|+1.$$

于是

$$\log^+M(r,f)=\log^+f(\zeta)\leqslant\log^+|f(0)|$$
$$+\sum_{\nu=1}^{k}\log^+|f^{(\nu)}(0)|+\log(k+2)$$
$$\leqslant(k+1)\log^+|f(0)|+\sum_{\nu=1}^{k}\log^+\left|\frac{f^{(\nu)}(0)}{f(0)}\right|$$
$$+\log(k+2)$$
$$\leqslant(k+1)\log^+|f(0)|+\sum_{\nu=1}^{k}m\left(r,\frac{f^{(\nu)}}{f}\right)$$
$$+\log(k+2).$$

再根据定理1.13′，当$r<\rho<1$时，有

$$\log^+M(r,f)<K\left\{\log^+|f(0)|+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+1\right.$$
$$\left.+\log\frac{1}{\rho-r}+\log\frac{1}{r}+\log^+\log^+M(\rho,f)\right\}$$
$$(2.27)$$

(2.2) 在 $\overline{O\zeta}$ 上存在一点 $z_0=r_0e^{i\alpha}$ $(0<r_0<r)$，使 $|f^{(k+1)}(z_0)|=1$，且 $|f^{(k+1)}(z)|\leqslant 1$ $(z\in\overline{Oz_0})$，置

$$F(t)=\frac{1}{(1-r_0)^k}f(z_0+(1-r_0)t)\qquad(|t|<1).$$

由于 $F(t)\neq 0$，$F^{(k)}(t)\neq 1$，根据 (2.26) 式，当 $0<R<1$ 时，

$$\log M(R,F)<\frac{K}{1-R}\left\{\log^+|F(0)|\right.$$

$$\left.+\log^+\frac{1}{|F^{(k+1)}(0)|}+\log\frac{2}{1-R}\right\}.$$

而

$$F(0)=\frac{1}{(1-r_0)^k}f(z_0),$$

$$|F^{(k+1)}(0)|=(1-r_0)|f^{(k+1)}(z_0)|=1-r_0,$$

故

$$\log M(R,F)<\frac{K}{1-R}\left\{\log^+|f(z_0)|+\log\frac{1}{1-r_0}\right.$$

$$\left.+\log\frac{2}{1-R}\right\}\qquad(0<R<1).$$

取 $R=\dfrac{r-r_0}{1-r_0}$，则 $z_0+(1-r_0)Re^{i\alpha}=\zeta$。因此

$$\log^+|f(\zeta)|=\log^+|F(Re^{i\alpha})|$$

$$<\frac{K}{1-R}\left\{\log^+|f(z_0)|+\log\frac{1}{1-r_0}+\log\frac{2}{1-R}\right\}$$

再注意 $1-R=\dfrac{1-r}{1-r_0}>1-r$ 及 $1-r_0>1-r$，便得

$$\log^+|f(\zeta)|<\frac{K}{1-r}\left\{\log^+|f(z_0)|+\log\frac{2}{1-r}\right\}. \quad (2.28)$$

为消去$f(z_0)$，类似于情形（2.1）开始部分，通过依次积分，可得

$$|f(z_0)|\leqslant|f(0)|+\sum_{\nu=1}^{k}|f^{(\nu)}(0)|+1.$$

故

$$\log^+|f(z_0)|\leqslant\log^+|f(0)|+\sum_{\nu=1}^{k}\log^+|f^{(\nu)}(0)|+\log(k+2)$$

$$\leqslant(k+1)\log^+|f(0)|+\sum_{\nu=1}^{k}\log^+\left|\frac{f^{(\nu)}(0)}{f(0)}\right|$$

$$+\log(k+2)$$

$$\leqslant(k+1)\log^+|f(0)|+\sum_{\nu=1}^{k}m\left(r,\frac{f^{(\nu)}}{f}\right)$$

$$+\log(k+2).$$

又根据定理1.13′及（2.28）式，当$r<\rho<1$时，有

$$\log^+M(r,f)=\log^+|f(\zeta)|<\frac{K}{1-r}\left\{\log^+|f(0)|\right.$$

$$+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+1+\log\frac{1}{\rho-r}$$

$$\left.+\log\frac{2}{1-r}+\log\frac{1}{r}+\log^+T(\rho,f)\right\}$$

$$<\frac{K}{\rho-r}\left\{\log^+|f(0)|+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}\right.$$

$$+\log\frac{1}{r}+\log\frac{1}{\rho-r}+1$$

$$+\log^+\log^+M(\rho,f)\Big\}. \qquad (2.29)$$

因此，无论是情形（2.1）还是（2.2），根据(2.27)式及(2.29)式，当$0<r<\rho<1$时，有

$$\log^+M(r,f)<\frac{K}{\rho-r}\Big\{\log^+|f(0)|+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+\log\frac{1}{r}+\log\frac{1}{\rho-r}+1+\log^+\log^+M(\rho,f)\Big\}. \qquad (2.30)$$

置

$$U(r)=\log^+\log^+M(r,f).$$

在（2.30）式两边取对数，得

$$U(r)<2\log\frac{1}{\rho-r}+\log\frac{1}{r}+\log^+|f(0)|+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+K+\log^+U(\rho).$$

再根据引理2.5，当$0<r<1$时，

$$U(r)<K\Big\{\log\frac{2}{1-r}+\log^+|f(0)|+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}\Big\}. \qquad (2.31)$$

在（2.30）式中，取$\rho=\frac{1+r}{2}$，并根据（2.31）式，就得

$$\log^+M(r,f)<\frac{K}{1-r}\Big\{\log^+|f(0)|+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+\log\frac{2}{1-r}\Big\}. \qquad (2.32)$$

若$f^{(k+1)}(0)=0$，我们又区分成两种情形：

（1）$f^{(k+1)}(z)\equiv 0$．此时，仿照上面情形（2.1）的讨论，易知（2.27）式对任何 $0<r<\rho<1$ 都成立，故根据引理2.5，（2.21）式成立．

（2）$f^{(k+1)}(z)\not\equiv 0$．取 $z_n\longrightarrow 0$（$n\to\infty$），使 $f^{(k+1)}(z_n)\neq 0$．再置

$$f_n(z)=\frac{1}{(1-|z_n|)^k}f(z_n+(1-|z_n|)z).$$

此时，$f_n(z)$满足（2.32）式，即当$0<r<1$时，

$$\log^+M(r,f_n)<\frac{K}{1-r}\left\{\log^+|f_n(0)|+\log^+\frac{1}{|f_n(0)|}+\log\frac{2}{1-r}\right\}.$$

在上式中令 $n\to+\infty$就得（2.21）式．至此定理2.10证毕

熊庆来指出，若能把（2.21）式中的原始值 $\log^+\dfrac{1}{|f(0)|}$消去就更为理想．我们可以解决这个问题，这就是下面的定理．

定理2.11 设函数$f(z)$在$|z|<1$内全纯，且$f(z)\neq 0$，$f^{(k)}(z)\neq 1$（$k\geqslant 0$，$f^{(0)}\equiv f$），则对于$0<r<1$，有

$$\log^+M(r,f)<\frac{K}{1-r}\left\{\log^+|f(0)|+\log\frac{2}{1-r}\right\},\tag{2.33}$$

其中 K 为仅依赖于 k 的正常数．

证明 根据（2.21）式，若$|f(0)|\geqslant 1$，则（2.33）式显然成立，今设$|f(0)|<1$．任取定$r(0<r<1)$．取$\zeta=re^{i\varphi}$，使$M(r,f)=|f(\zeta)|$．若$|f(\zeta)|\leqslant 1$，则（2.33）式显然成立．今再设$|f(\zeta)|>1$．于是在$\overline{O\zeta}$上存在一点$z_0=r_0e^{i\varphi}$（$0<r_0<r$），使$|f(r_0e^{i\varphi})|=1$．置

$$F(t)=\frac{1}{(1-r_0)^k}f(z_0+(1-r_0)t) \quad (|t|<1).$$

显然，在$|t|<1$内 $F(t)\neq 0$，$F^{(k)}(t)\neq 1$．根据定理2.10，有

$$\log^+M(\rho,F)<\frac{K}{1-\rho}\left\{k\log\frac{1}{1-r_0}+\log\frac{2}{1-\rho}\right\}$$

$$(0<\rho<1).$$

取R使$r=r_0+(1-r_0)R$，于是

$$\log^+|F(Re^{i\varphi})|\leqslant\log^+M(R,F)$$

$$<\frac{K}{1-R}\left\{k\log\frac{1}{1-r_0}+\log\frac{1}{1-R}\right\}.$$

而

$$|F(Re^{i\varphi})|=\left|\frac{1}{(1-r_0)^k}f(\zeta)\right|>|f(\zeta)|,$$

$$R=\frac{r-r_0}{1-r_0}<r,$$

故

$$\log^+M(r,f)<\frac{K}{1-r}\log\frac{2}{1-r}.$$

这就证明了定理的结论．

上述定理在$k=0$的情形首先由Schottky[1]得到，并称为Schottky定理．当$k\geqslant 1$时，我们称为Schottky型定理．

现在我们来证Montel定则（定理2.8）与Miranda定则(定理2.9)．根据定理2.1，只需证明族$\{f(z)\}$在D内每点正规．任取一点$\zeta\in D$，作圆$|z-\zeta|<R$，使$(|z-\zeta|<R)\subset D$．对于任一$f(z)\in\{f(z)\}$，任取一点z_0：$|z_0-\zeta|<\frac{R}{4}$，作

$$g(z)=\frac{1}{\left(\frac{3}{4}R\right)^k}f\left(\zeta+\frac{3}{4}Rz\right)\qquad(k\geqslant 0).$$

于是$g(z)$在$|z|<1$内满足$g(z)\neq 0$，$g^{(k)}(z)\neq 1$，根据定理 2.11 有

$$\log^+M\left(\frac{2}{3},\ g\right)<K\ (1+\log^+|g(0)|),$$

也就有

$$\log^+M\left(\frac{R}{2},\ z_0,\ f\right)<K(1+\log^+|f(z_0)|).$$

再根据定理2.7可知，族 $\{f(z)\}$ 在点 $z=\zeta$ 正规.

我们还可以把定理2.8及定理2.9的条件减弱.

定理2.12 设 $\{f(z)\}$ 为区域 D 内一全纯函数族，k 为一非负整数. 若族 $\{f(z)\}$ 中每个函数 $f(z)$在 D 内满足 $f(z)\neq 0$，$f^{(k)}(z)-1$在 D 内的零点个数（重数不计）均不超过 m，则族 $\{f(z)\}$ 在 D 内正规.

证明 任取定一点 $z_0\in D$，根据定理 2.1，只要证明族 $\{f(z)\}$ 在点z_0正规.作圆C：$|z-z_0|<R$使$\overline{C}\subset D$. 任取一函数序列 $f_n(z)\in\{f(z)\}$ $(n=1,2,\cdots)$. 显然存在 $f_n(z)$的一子序列，不妨仍设为$f_n(z)$，使$f_n^{(k)}(z)-1$在 $\overline{C}$ 上的零点数（重数不计）恒为 m' $(\leqslant m)$，这些零点记为 z_{n1}，z_{n2}，$\cdots$，$z_{nm'}$ $(n=1,2,\cdots)$，不难看出存在 $f_n(z)$的于序列$f_{n_p}(z)$，使$z_{n_pj}\longrightarrow z_j$ $(p\to\infty,\ j=1,\ 2,\ \cdots m')$. 令 $C_0=C-\{z_1,\ \cdots,\ z_{m'}\}$，根据定理2.1，2.8及2.9，族 $\{f_{n_p}(z)\}$ 在 C_0内正规. 再根据定理2.5可知，族 $\{f_{n_p}(z)\}$ 在 C 内正规. 故存在 $\{f_{n_p}(z)\}$ 的子序列

也就是族 $\{f_n(z)\}$ 的子序列在 C 上内闭一致收敛或内闭一致趋于无穷，从而证明了族 $\{f(z)\}$ 在点 z_0 正规.

Miranda 定则的深刻意义在于它开辟了函数结合其导数的正规定则的研究领域，下节中我们进一步讨论这方面的内容.

§2.3 Miranda定则与微分多项式

自建立了 Miranda 定则后，一个自然的推广是把 Miranda 定则的条件中涉及导函数取值的条件改为微分多项式取值的条件. Valiron[1]首先考虑了这个问题，他建立了下述定理.

定理2.13 设 $\{f(z)\}$ 为区域 D 内一全纯函数族，a_0，a_1，…，a_k 为一组复数，$a_k\neq 0$. 若族 $\{f(z)\}$ 中每个函数 $f(z)$ 在D 内满足 $f(z)\neq 0$ 及

$$a_0f+a_1f'+\cdots+a_kf^{(k)}\neq 1,$$

则族 $\{f(z)\}$ 在 D 内正规.

庄圻泰[1]又把上述定理中的系数 a_0，a_1，…，a_k 及 1 推广成全纯函数的情形，获得下面有趣的结果. 后面我们仅就庄圻泰的结果加以证明，自然也就证明了定理2.13.

定理2.14 设 $\{f(z)\}$ 为区域 D 内一全纯函数族. $a_1(z)$，$a_2(z)$，…，$a_k(z)$及$C(z)$为一组 D 内全纯的函数，$a_k(z)\neq 0$，$C(z)\neq 0$. 若族 $\{f(z)\}$ 中每个函数 $f(z)$ 在 D 内满足 $f(z)\neq 0$ 及

$$a_0(z)f+a_1(z)f'+\cdots+a_k(z)f^{(k)}\neq C(z),$$

则族 $\{f(z)\}$ 在 D 内正规.

我们先给出一个界囿定理.

引理2.8　设 $f(z)$在$|z|<R$ 内全纯，且 $f(z)\neq 0$, $F(z)\neq 1$, 其中$F(z)=b_0(z)f(z)+b_1(z)f'(z)+\cdots+b_k(z)f^{(k)}(z)$, $b_0(z)$, $b_1(z)$, $\cdots$, $b_k(z)$为$|z|<R$ 内有界的全纯函数. 若$F'(0)\neq 0$, 则当 $0<r<R$ 时,

$$\log^+ M(r,f)<\frac{KR}{R-r}\left\{\log\frac{2R}{R-r}+\log^+R+\log^+\frac{1}{R}\right.$$
$$+\log^+|f(0)|+\log^+|F(0)|$$
$$\left.+\log^+\frac{1}{|F'(0)|}\right\},$$

其中 K 为与 f, r 无关的正常数.

证明　由恒等式

$$\frac{1}{f}=\frac{F}{f}-\frac{F-1}{F'}\frac{F'}{f}$$

得

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)\leqslant m\left(r,\frac{F}{f}\right)+m\left(r,\frac{F'}{f}\right)+m\left(r,\frac{F'}{F-1}\right)$$
$$+\log\left|\frac{F(0)-1}{F'(0)}\right|+\log 2. \qquad (2.34)$$

而

$$m\left(r,\frac{F}{f}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{k}m\left(r,\frac{f^{(i)}}{f}\right)+K, \qquad (2.35)$$

$$m\left(r,\frac{F'}{f}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{k+1}m\left(r,\frac{f^{(i)}}{f}\right)+K. \qquad (2.36)$$

另外，根据定理1.13，当$0<r<\rho<R$, $\rho'=\frac{r+\rho}{2}$时,

$$m\left(r,\frac{F'}{F-1}\right)<K\left\{1+\log^+\frac{1}{\rho'-r}+\log^+\frac{1}{r}+\log^+\rho'\right.$$

$$+\log^+\log^+\frac{1}{|F(0)-1|}$$

$$\left.+\log^+T(\rho',F-1)\right\}. \tag{2.37}$$

而

$$T(\rho',F)=m(\rho',F)\leqslant m\left(\rho',\frac{F}{f}\right)+m(\rho',f)$$

$$\leqslant m(\rho,f)+\sum_{i=1}^{k}m\left(\rho',\frac{f^{(i)}}{f}\right)+K. \tag{2.38}$$

再根据定理1.13′并结合（2.34）～（2.38）式，当$0<r<\rho<R$时，

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)<K\left\{1+\log^+\frac{1}{r}+\log^+\frac{1}{\rho-r}+\log^+\rho\right.$$

$$+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+\log^+\log^+\frac{1}{|F(0)-1|}$$

$$\left.+\log^+T(\rho,f)\right\}+\log|F(0)-1|$$

$$+\log\frac{1}{|F'(0)|}.$$

于是

$$T(r,f)=T\left(r,\frac{1}{f}\right)+\log|f(0)|=m\left(r,\frac{1}{f}\right)$$

$$+\log|f(0)|$$

$$<K\left\{1+\log^+\frac{1}{r}+\log^+\frac{1}{\rho-r}+\log^+\rho\right.$$

$$+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+\log^+\log^+\frac{1}{|F(0)-1|}$$

$$+\log^+T(\rho,f)\Big\}+\log|f(0)|+\log|F(0)-1|$$

$$+\log\frac{1}{|F'(0)|}.$$

又根据引理2.3,

$$T(r,f)<K\left\{1+\log^+\frac{1}{r}+\log^+\frac{1}{\rho-r}+\log^+\rho\right.$$

$$\left.+\log^+T(\rho,f)\right\}+\log^+|f(0)|$$

$$+\log^+|F(0)-1|+\log^+\frac{1}{|F'(0)|}.$$

最后根据引理2.5，当$0<r<R$时，有

$$T(r,f)<K\left\{1+\log\frac{R}{R-r}+\log^+R+\log^+\frac{1}{R}\right.$$

$$\left.+\log^+|f(0)|+\log^+|F(0)|+\log^+\frac{1}{|F'(0)|}\right\}$$

再由

$$\log M(r,f)\leqslant\frac{\frac{R+r}{2}+r}{\frac{R+r}{2}-r}T\left(\frac{R+r}{2},f\right)\qquad(0<r<R),$$

就证得引理的结论.

现在来证明定理2.14. 令 E 为 $a_k(z)$与$C(z)$在区域 D 内所有零点所成之集，并记 $G=D-E$. 根据定理2.5，只需证族 $\{f(z)\}$ 在区域 G 内正规. 又根据定理2.1，只需证族 $\{f(z)\}$ 在 G 内每一点正规. 现任取定一点 $z_0\in G$. 再根据定理2.4，我

们只需证存在正数 K 及 z_0 的某个邻域 $U(z_0)$，使对族 $\{f(z)\}$ 中任一函数 $f(z)$ 在 $U(z_0)$ 内或者恒有 $|f(z)|\leqslant K$，或者恒有 $\left|\frac{1}{f(z)}\right|\leqslant K$．作圆 $|z-z_0|<R$，使 $(|z-z_0|\leqslant R)\subset G$．任取 $f(z)\in\{f(z)\}$．我们置

$$F(z)=\frac{a_0(z)}{c(z)}f(z)+\frac{a_1(z)}{c(z)}f'(z)+\cdots$$

$$+\frac{a_k(z)}{c(z)}f^{(k)}(z),$$

$$H=\max_{\substack{0\leq i\leq k\\|z-z_0|\leq R}}\left|\frac{a_i(z)}{c(z)}\right|,$$

$$h=\min_{|z-z_0|\leq R}\left|\frac{a_0(z)}{c(z)}\right|,$$

$$\delta=\min\left\{R,h,\frac{h}{H},1\right\}.$$

现区分两种情形：

（1）在圆 $|z-z_0|\leqslant\frac{\delta}{64}$ 上或者恒有 $|f(z)|<1$，或者恒有 $|f(z)|>1$．

（2）在圆 $|z-z_0|\leqslant\frac{\delta}{64}$ 上存在一点 ζ，使 $f(\zeta)=1$．此时，我们再区分为两种情形：

(2.1) 在 $|z-z_0|\leqslant\frac{\delta}{8}$ 上，恒有

$$\sum_{j=0}^{k-1}|f^{(j)}(z)|+|F(z)|\geqslant\frac{1}{4}.$$

于是由上式，在 $|z-z_0|\leqslant\frac{\delta}{8}$ 上，有

$$\left|\frac{1}{f}\right|\leqslant\sum_{j=0}^{k}\left|\frac{f^{(j)}}{f}\right|,$$

故根据定理1.13′，当 $0<r<\rho<\frac{\delta}{16}$ 时，有

$$\begin{aligned}m\left(r,\zeta,\frac{1}{f}\right)\leqslant\sum_{j=1}^{k}m\left(r,\zeta,\frac{f^{(j)}}{f}\right)+\log(k+1)\\+(k+1)\log^+H<K\Big\{1+\log^+\frac{1}{r}\\+\log^+\rho+\log^+\frac{1}{\rho-r}+\log^+T(\rho,\zeta,f)\\+\log^+\log^+\frac{1}{|f(\zeta)|}\Big\}.\end{aligned}$$

注意 $|f(\zeta)|=1$ 及 $f\neq0$ （$|z-z_0|<\delta$），而有

$$\begin{aligned}T(r,\zeta,f)<K\Big\{1+\log^+\frac{1}{r}+\log^+\rho+\log^+\frac{1}{\rho-r}\\+\log^+T(\rho,\zeta,f)\Big\}.\end{aligned}$$

应用引理2.5，当 $0<r<\frac{\delta}{16}$ 时，

$$T(r,\zeta,f)<K\left\{\log\frac{\frac{\delta}{16}}{\frac{\delta}{16}-r}+\log\frac{16}{\delta}\right\}.$$

故

$$\log^+M\left(\frac{\delta}{32},\zeta,f\right)\leqslant\frac{\frac{3\delta}{64}+\frac{\delta}{32}}{\frac{3\delta}{64}-\frac{\delta}{32}}T\left(\frac{3\delta}{64},\zeta,f\right)<K.$$

另外，圆 $|z|\leqslant\dfrac{\delta}{64}$ 包含于圆 $|z-\zeta|\leqslant\dfrac{\delta}{32}$，因此

$$\log^+ M\left(\frac{\delta}{64},f\right)<K.$$

(2.2)　在 $|z-z_0|\leqslant\dfrac{\delta}{8}$ 上存在一点 z_1，使

$$\sum_{j=0}^{k-1}|f^{(j)}(z_1)|+|F(z_1)|<\frac{h}{4}. \tag{2.39}$$

我们又区分为两种情形.

(2.2.1) $|F'(z_1)|\geqslant 1$. 这时，应用引理2.6，就有

$$\log^+ M\left(\frac{\delta}{4},\ z_1,f\right)<K.$$

由于圆 $|z|\leqslant\dfrac{\delta}{64}$ 包含于 $|z-z_1|\leqslant\dfrac{\delta}{4}$，故

$$\log^+ M\left(\frac{\delta}{64},f\right)<K.$$

(2.2.2) $|F'(z_1)|<1$. 此时，我们首先指出，在线段 $\overline{\zeta z_1}$ 上必存在一点 z_2，使 $|F'(z_2)|\geqslant 1$. 假定不成立，即在 $\overline{\zeta z_1}$ 上恒有 $|F'(z)|<1$，于是由积分，得

$$\max_{z\in\overline{\zeta z_1}}|F(z)|\leqslant|F(z_1)|+1.$$

故

$$h\cdot\max_{z\in\overline{\zeta z_1}}|f^{(k)}(z)|\leqslant\max_{z\in\overline{\zeta z_1}}|F(z)|+H\left\{\max_{z\in\overline{\zeta z_1}}|f(z)|\right.$$

$$\left.+\max_{z\in\overline{\zeta z_1}}|f'(z)|+\cdots+\max_{z\in\overline{\zeta z_1}}|f^{(k-1)}(z)|\right\}$$

$$\leqslant |F(z_1)|+1+H\left\{\max_{z\in\overline{\zeta z_1}}|f(z)|+\cdots\right.$$

$$\left.+\max_{z\in\overline{\zeta z_1}}|f^{(k-1)}(z)|\right\}.$$

根据δ的取法并通过积分，可得

$$\max_{z\in\overline{\zeta z_1}}|f^{(k-1)}(z)|\leqslant|f^{(k-1)}(z_1)|+\frac{\delta}{4}\frac{1}{h}|F(z_1)|$$

$$+\frac{\delta}{4}\frac{1}{h}+\frac{\delta}{4}\frac{H}{h}\left\{\max_{z\in\overline{\zeta z_1}}|f(z)|\right.$$

$$\left.+\cdots+\max_{z\in\overline{\zeta z_1}}|f^{(k-1)}(z)|\right\}\leqslant|f^{(k-1)}(z_1)|$$

$$+|F(z_1)|+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left\{\max_{z\in\overline{\zeta z_1}}|f(z)|\right.$$

$$\left.+\cdots+\max_{z\in\overline{\zeta z_1}}|f^{(k-1)}(z)|\right\}$$

于是

$$\max_{z\in\overline{\zeta z_1}}|f^{(k-1)}(z)|\leqslant 2(|\,{}^{(k-1)}(z_1)+|F(z_1)|)$$

$$+1+\max_{z\in\overline{\zeta z_1}}|f(z)|+\cdots+\max_{z\in\overline{\zeta z_1}}|f^{(k-2)}(z)|.$$

由此，同样可得

$$\max_{z\in\overline{\zeta z_1}}|f^{(k-2)}(z)|\leqslant 2(|f^{(k-2)}(z_1)|+|f^{(k-1)}(z_1)|$$

$$+|F(z_1)|)+1$$

$$+\max_{z\in\overline{\zeta z_1}}|f(z)|+\cdots$$

$$+\max_{z\in\overline{\zeta z_1}}|f^{k-3}(z)|.$$

依次继续下去，最后得

$$\max_{z\in\overline{\zeta z_1}}|f(z)|\leqslant 2(|f(z_1)|+|f'(z_1)|+\cdots+|f^{(k-1)}(z_1)|$$

$$+|F(z_1)|)+\frac{1}{2}.$$

由此及（2.39）式，得$|f(\zeta)|<1$，这与情形（2）的假定$|f(\zeta)|=1$矛盾.

因此，在$\overline{\zeta z_1}$上存在点z_3，使$|F'(z_3)|=1$，而当$z\in\overline{z_1 z_3}$时，$|F'(z)|\leqslant 1$，完全类似地使用上述方法，可知

$$|f(z_3)|<1,\quad |F(z_3)|<1.$$

于是，应用引理2.6，有

$$\log^+M\left(\frac{\delta}{4},\ z_3,\ f\right)<K.$$

再注意到圆$|z|\leqslant\frac{\delta}{64}$包含于$|z-z_1|\leqslant\frac{\delta}{4}$中，从而有

$$\log^+M\left(\frac{\delta}{64},f\right)<K.$$

至此，定理2.14证毕.

上述定理的条件中，关于f及其各级导数的线性组合是否可推广成关于f及其各级导数的齐次多项式呢？对此，Valiron[1]已作了回答. 首先我们引进一个概念.

定义2.6 一个p次常系数齐次微分多项式$H(f,f',\cdots,f^{(\nu)})$，

以 e^g 代替 f 后即可表成 $e^{pg}G(g', g'', \cdots, g^{(\nu)})$，其中 $G(g', g'', \cdots, g^{(\nu)})$ 为关于 $g', \cdots, g^{(\nu)}$ 的微分多项式. 若 $G(g', g'', \cdots, g^{(\nu)})$ 可表成

$$b(g')^q + h(g', g'', \cdots, g^{(\nu)}),$$

其中系数 $b \neq 0$ 而 $h(g', g'', \cdots, g^{(\nu)})$ 为次数小于 q 的微分多项式，那么称多项式 H 为非退化齐次微分多项式.

下面的定理就是 Valiron 的结果.

定理2.15 设 $\{f(z)\}$ 为区域 D 内一全纯函数族. 若族 $\{f(z)\}$ 中每个函数 $f(z)$ 在 D 内满足 $f(z) \neq 0$ 及 $H(f, f', \cdots, f^{(k)}) \neq 1$，其中 H 为非退化齐次微分多项式，则族 $\{f(z)\}$ 在 D 内正规.

我们还可以把齐次微分多项式的情形推广为非齐次微分多项式的情形（见作者[3]），这就是下面的定理.

定理2.16 设 $\{f(z)\}$ 为区域 D 内一全纯函数族. 若族 $\{f(z)\}$ 中每个函数 $f(z)$ 在 D 内满足 $f(z) \neq 0$ 及 $\sum_{i=1}^{m} H_{p_i}(f, f', \cdots, f^{(k)}) \neq 0$，其中 $H_{p_i}(f, f', \cdots, f^{(k)})$ 为 p_i 次非退化齐次微分多项式，$0 \leqslant p_1 < p_2 < \cdots < p_m$，$m \geqslant 2$，则族 $\{f(z)\}$ 在 D 内正规.

由于定理2.16是定理2.15的推广，因此，我们只需证定理2.16.

任取定点 $\zeta \in D$，根据定理2.1，只需证族 $\{f(z)\}$ 在点 ζ 正规. 取正数 R，使 $(|z-\zeta| < 2R) \subset D$. 为简单起见，不妨设 $\zeta = 0$，$R = 1$. 再根据定理2.7，我们只需证明：对任一点 $z_0 \left(|z_0| < \frac{1}{4}\right)$ 及任一 $f \in \{f(z)\}$，恒有

$$M\left(\frac{1}{2}, z_0, g\right) < K\left(S + |g(z_0)|\right), \qquad (2.40)$$

其中 K 为绝对常数，S 为待定常数，它与 f 无关，而$g(z) = \log f(z)$，$0 \leqslant \mathrm{Im}\{g(z_0)\} < 2\pi$.

假定 (2.40) 式对某个$f \in \{f(z)\}$ 不成立，则根据庄圻泰[2]中的定理 4，在圆$|v - \alpha_1\rho| < \rho$ 内存在全纯函数 $h(v)$ 和 $\delta(v)$，使$h(v) \in$ 圆$(|z - z_0| < 1)$ 且

$$g[h(v)] = e^v, \qquad (2.41)$$

$$g'[h(v)] = e^{\delta(v)}, \qquad (2.42)$$

$$|(g[h(v)])^n| < \alpha_2\rho(\log\rho)^{2k} \ (n = 1, \cdots, k), \qquad (2.43)$$

$$\log\rho - \alpha_3 < |\delta(v)| < \alpha_4\log\rho, \qquad (2.44)$$

其中 α_1、α_2、α_3 和α_4为绝对常数，上述各式均在圆$|v - \alpha_1\rho| < \rho$ 内成立. 另外

$$\rho > S. \qquad (2.45)$$

根据 Rouché 定理，在圆$|u - \alpha_1\rho_i| < \frac{\rho}{2}$内存在全纯函数 $\omega(u)$，使$\omega(u) \in$ 圆：$|v - \alpha_1\rho_i| < \frac{\rho}{2}$且

$$\omega(u) + \delta[\omega(u)] \equiv u.$$

若令 $f = e^g$ 代入H_{p_i}，则可设

$$H_{p_i}(f, f', \cdots, f^{(k)}) = e^{p_i g}\{b_i(g')^{q_i} + h_i(g', g'', \cdots, g^{(k)})\},$$

其中 h_i 的次数小于 q_i. 置

$$\eta = \max\left\{\frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1}, \frac{q_3 - q_1}{p_3 - p_1}, \cdots, \frac{q_m - q_1}{p_m - p_1}\right\},$$

并设

$$\frac{q_{i_1}-q_1}{p_{i_1}-p_1}=\frac{q_{i_2}-q_1}{p_{i_2}-p_1}=\cdots=\frac{q_{i_l}-q_1}{p_{i_l}-p_1}=\eta$$

$$(2\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_l)\ .$$

再置

$$a_i(z)=\begin{cases} b_i+\dfrac{1}{g'}h_i(g',g'',\cdots,g^{(k)})\ \ (i=i_j,\,j=1,\cdots,l), \\ (g')^{\beta_i}\left\{b_i+\dfrac{1}{g'}h_i(g',g'',\cdots g^{(k)})\right\} \end{cases}$$

$$(i\neq i_j,\ \ j=1,\ \cdots,\ l,\ )$$

其中$\beta_i=(p_i-p_1)\left(\dfrac{q_i-q_1}{p_i-p_1}-\eta\right)$. 于是，根据定理条件，若令

$z=h[\omega(u)]$，则当$|u-\alpha_1\rho_i|<\dfrac{\rho}{2}$时，有

$$\sum_{i=1}^{m}a_i(h[\omega(u)])e^{(p_i-p_1)u}\neq 0\ . \tag{2.46}$$

另外，我们用W_0表示下面方程的一个非零根：

$$b_{i_l}W^{p_{i_l}-p_1}+b_{i_{l-1}}W^{p_{i_{l-1}}-p_1}+\cdots+b_{i_1}=0\ .$$

又令

$$b_i^*=\begin{cases} b_{i_j}\ \ (i=i_j)\ , \\ 0\qquad (i\neq i_j)\ . \end{cases}$$

并取定u_0：$e^{u_0}=W_0$及正数R，使

$$d=\min_{|u-u_0|=R}\left|\sum_{i=1}^{m}b_i^*e^{(p_i-p_1)u}\right|>0.$$

显然，若令$u_n=u_0+2n\pi i$（$n=0$，±1，…），则对一切整数n，有

$$\min_{|u-u_n|=R}\left|\sum_{i=1}^{m} b_i^* e^{(p_i-p_1)u}\right|=d,$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_i^* e^{(p_i-p_1)u_n}=0.$$

再由（2.41）～（2.45）式，当S充分大后，恒有

$$\left|\sum_{i=1}^{m} a_i(h[\omega(u)])e^{(p_i-p_1)u}-\sum_{i=1}^{m} b_i^* e^{(p_i-p_1)u}\right|<d$$

$$\left(|u-\alpha_1\rho i|<\frac{\rho}{2}\right).$$

适当取整数n，使

$$|u_n-\alpha_1\rho i|<|\mathrm{Re}u_0|+2\pi=\left|\log|W_0|\right|+2\pi.$$

故当$S>2\left(R+\left|\log|W_0|\right|+2\pi\right)$时，

$$(|u-u_n|\leqslant R)\subset\left(|u-\alpha_1\rho i|<\frac{\rho}{2}\right).$$

于是由Rouché定理，$\sum_{i=1}^{m} a_i(h[\omega(u)])e^{(p_i-p_1)u}$在圆$|u-u_n|<R$内，从而也就在圆$|u-\alpha_1\rho i|<\frac{\rho}{2}$内有零点，这与（2.46）式矛盾，故（2.40）式成立，至此，定理2.16证毕。

§2.4 涉及重值的正规定则

上面所建立的若干正规定则中，都是考虑函数或其导函数不取某值的情形．我们要问，如果允许取某值，又如何建立相应的正规定则呢？Montel 首先利用模函数证明，若区域 D 内全纯函数族 $\{f(z)\}$ 中每个函数 $f(z)$ 取0和1之点的级分别可被 m 和n除尽，其中$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}<1$，则族 $\{f(z)\}$ 在 D 内正规．Bloch 与Valiron 建立了一般性命题：设 $\{f(z)\}$ 为区域 D 内一全纯函数族．若族 $\{f(z)\}$ 中每个函数 $f(z)$取 $q(\geqslant 2)$个互为判别的有穷值 a_i $(i=1, 2, \cdots, q)$ 之点的级均分别$\geqslant m_i$，且

$$\sum_{i=1}^{q}\left(1-\frac{1}{m_i}\right)>1,$$

则族$\{f(z)\}$在D内正规．他们同时还指出上述命题可推广到亚纯函数的情形，对此我们将在第三章3.4中讨论．至于涉及导数的重值，熊庆来和何育赞[1]首先建立了下述定理．

定理2.17 设$\{f(z)\}$为区域D 内一全纯函数族．若族$\{f(z)\}$中每个函数$f(z)$在D 内满足$f(z)\neq 0$ 及$f^{(k)}(z)-1$ 的零点之级均大于 1，则族$\{f(z)\}$在D内正规．

根据定理2.7，我们只需证下面的界囿定理．

引理2.7 设$f(z)$于$|z|<1$全纯，$f(z)\neq 0$ 且$f^{(k)}(z)-1$ 的零点之级均大于 1，则当$0<r<1$时，

$$\log^+ M(r,\ f) < \frac{K}{1-r}\left(\log\frac{2}{1-r} + \log^+ \|f(0)\|\right).$$

(2.47)

证明 先设 $f^{(k+1)}(0)\neq 0$，$f^{(k)}(0)-1\neq 0$．由恒等式

$$\frac{1}{f}=\frac{f^{(k)}}{f}-\frac{f^{(k)}-1}{f^{(k+1)}}\ \frac{f^{(k+1)}}{f},$$

得

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)\leqslant m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)$$
$$+m\left(r,\frac{f^{(k)}-1}{f^{(k+1)}}\right)+\log 2\,.$$

应用 Jensen 公式，有

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)\leqslant m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)$$
$$+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)+N\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)$$
$$-N\left(r,\frac{f^{(k)}-1}{f^{(k+1)}}\right)+\log\left|\frac{f^{(k)}(0)-1}{f^{(k+1)}(0)}\right|$$
$$+\log 2$$
$$=m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)$$
$$+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)+N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)$$
$$-N\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+\log\left|\frac{f^{(k)}(0)-1}{f^{(k+1)}(0)}\right|$$
$$+\log 2$$
$$\leqslant m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)$$

$$+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)$$

$$+\log\left|\frac{f^{(k)}(0)-1}{f^{(k+1)}(0)}\right|+\log 2.$$

而

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)\leqslant\frac{1}{2}N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}T\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}T(r,f^{(k)}-1)$$

$$+\frac{1}{2}\log\frac{1}{|f^{(k)}(0)-1|}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+\frac{1}{2}\log 2$$

$$+\frac{1}{2}m(r,f)$$

$$+\frac{1}{2}\log\frac{1}{|f^{(k)}(0)-1|}.$$

故

$$m(r,f)\leqslant 3m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+2m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)$$

$$+2m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)$$

$$+\log|f^{(k)}(0)-1|+2\log\frac{1}{|f^{(k+1)}(0)|}$$

$$+3\log 2+2\log|f(0)|. \qquad (2.48)$$

从(2.48)式出发，完全类似于在定理2.10的证明过程中，由

(2.22) 式开始所进行的步骤，可得

$$\log^{+}M(r,f)<\frac{K}{1-r}\left\{\log^{+}|f(0)|+\log^{+}\frac{1}{|f(0)|}\right.$$

$$\left.+\log\frac{2}{1-r}\right\}. \tag{2.49}$$

若$f^{(k+1)}(0)=0$或$f^{(k)}(0)-1=0$，我们区分两种情形.

(1) $f^{(k+1)}(z)\equiv 0$. 此时，仿照定理2.10的证明过程中对情形(2.1)的讨论，即可知(2.49)式成立。

(2) $f^{(k+1)}(z)\not\equiv 0$.这时$f^{(k)}(z)-1\not\equiv 0$. 故存在一点列$z_n\to 0$ $(n\to\infty)$ 使$f^{(k+1)}(z_n)\neq 0$，$f^{(k)}(z_n)-1\neq 0$ $(n=1,2,\cdots)$.

置

$$f_n(z)=\frac{1}{(1-|z_n|)^k}f(z_n+(1-|z_n|z)$$

$$(n=1,2,\cdots,).$$

应用(2.49)式于$f_n(z)$，得

$$\log^{+}M(r,f_n)<\frac{K}{1-r}\left\{\log^{+}\frac{1}{|f_n(0)|}+\log^{+}|f_n(0)|\right.$$

$$\left.+\log\frac{2}{1-r}\right\}.$$

在上式中令$n\to\infty$，得(2.49)式.

再仿照定理2.11的证明，就可导出(2.47)式.

熊庆来和何育赞在其文〔1〕中指出，若把上述定理的条件改为$f(z)$的零点之级均$\geqslant m$，$f'(z)-1$的零点之级均$\geqslant n$，而

$\frac{2}{m}+\frac{1}{n}<1$，则族 $\{f(z)\}$ 似乎应正规．后来，杨乐给出了证明，并且他和张广厚[1]建立了更普遍的正规定则：

定理2.18 设 $\{f(z)\}$ 为区域 D 内一全纯函数族，其中每个函数 $f(z)$ 的零点之级 $\geqslant m$，$f^{(k)}(z)-1$ 的零点之级 $\geqslant n$．若 $\frac{k+1}{m}+\frac{1}{n}<1$，则 $\{f(z)\}$ 在 D 内正规．

根据定理2.7，我们只需证明如下界囿定理：

定理2.18′ 设 $f(z)$ 于 $|z|<1$ 全纯，$f(z)$ 的零点之级 $\geqslant m$，$f^{(k)}(z)-1$ 的零点之级 $\geqslant n$．若 $\frac{k+1}{m}+\frac{1}{n}<1$，则当 $0<r<1$ 时，有

$$\log^+M(r,f)<\frac{K}{1-r}\left(\log^+|f(0)|+\log\frac{2}{1-r}\right), \tag{2.50}$$

其中 K 为仅依赖于 k、m 及 n 的正常数．

证明 首先证当 $f^{(k+1)}(0)\neq 0$ 时，有

$$\log^+M(r,f)<\frac{K}{1-r}\left(\log^+|f(0)|+\log^+|f^{(k)}(0)|+\log^+\frac{1}{|f^{(k+1)}(0)|}+\log\frac{2}{1-r}\right)$$

$$(0<r<1)\text{．} \tag{2.51}$$

先设 $f(0)\neq 0$，$f^{(k)}(0)-1\neq 0$．由恒等式

$$\frac{1}{f}=\frac{f^{(k)}}{f}-\frac{f^{(k)}-1}{f^{(k+1)}}\cdot\frac{f^{(k+1)}}{f}$$

得

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)\leqslant m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)$$

$$+m\left(r,\frac{f^{(k)}-1}{f^{(k+1)}}\right)+\log 2$$

$$=m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)$$

$$+N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)-N\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)$$

$$+\log\left|\frac{f^{(k)}(0)-1}{f^{(k+1)}(0)}\right|+\log 2.$$

故

$$m(r,f)=T(r,f)=m\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)$$

$$+\log|f(0)|$$

$$\leqslant m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)$$

$$+m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)+N_{k+1)}\left(r,\frac{1}{f}\right)^{1)}$$

$$+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)+\log\left|\frac{f^{(k)}(0)-1}{f^{(k+1)}(0)}\right|$$

$$+\log 2+\log|f(0)|.$$

而

$$N_{k+1)}\left(r,\frac{1}{f}\right)\leqslant\frac{k+1}{m}N\left(r,\frac{1}{f}\right)\leqslant\frac{k+1}{m}T(r,f)$$

$$-\frac{k+1}{m}\log|f(0)|,$$

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)\leqslant\frac{1}{n}N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)$$

---

1) $N_{k+1}\left(r,\frac{1}{f}\right)$ 表示f的零点的密指量，其零点之级须计，但级超过$k+1$时只计$k+1$。

$$\leqslant \frac{1}{n} T\left(r, f^{(k)}-1\right)+\frac{1}{n} \log \frac{1}{\left|f^{(k)}(0)-1\right|}$$

$$\leqslant \frac{1}{n} m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right)+\frac{1}{n} \log 2+\frac{1}{n} m(r, f)$$

$$+\frac{1}{n} \log \frac{1}{\left|f^{(k)}(0)-1\right|}.$$

于是

$$\left(1-\frac{k+1}{m}-\frac{1}{n}\right) m(r, f)$$

$$\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right) m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right)+m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f}\right)$$

$$+m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)+\left(1+\frac{1}{n}\right) \log 2$$

$$+\left(1-\frac{1}{n}\right) \log \left|f^{(k)}(0)-1\right|$$

$$+\left(1-\frac{k+1}{m}\right) \log |f(0)|.$$

再应用定理1.13′，引理2.3及引理2.5，就有（2.51）式成立.

若$f(0)=0$或$f^{(k)}(0)-1=0$，可取点列z_n，使$z_n \rightarrow 0$ $(n \rightarrow \infty)$ 且 $(1-|z_n|) f^{(k+1)}(z_n) \neq 0$，$f(z_n) \neq 0$ 及 $f^{(k)}(z_n)-1 \neq 0$ $(n=1, 2, \cdots)$. 再应用（2.51）式于 $f_n(z)=\frac{1}{(1-|z_n|)^k} f(z_n+(1-|z_n| z))$，并令$n \rightarrow \infty$，仍得（2.51）式.

现在对$f^{(k+1)}(0)$区分两种情形.

（1）$|f^{(k+1)}(0)|>1$．此时，应用（2.51）式，有

$$\log^+ M(r,f)<\frac{K}{1-r}\left\{\log^+|f(0)|+\log^+|f^{(k)}(0)|+\log\frac{2}{1-r}\right\}\quad(0<r<1).\qquad(2.52)$$

（2）$|f^{(k+1)}(0)|\leqslant 1$.任意固定 r： $0<r<1$.取$\zeta=re^{i\alpha}$，使$|f(\zeta)|=M(r,f)$．我们再区分为两种情形.

（2.1）在$\overline{O\zeta}$上恒有$|f^{(k+1)}(z)|\leqslant 1$．此时，

$$|f(\zeta)|<1+|f(0)|+|f'(0)|+\cdots+|f^{(k)}(0)|,$$

于是

$$\log^+ M(r,f)<K(1+\log^+|f(0)|+\log^+|f'(0)|+\cdots+\log^+|f^{(k)}(0)|).\qquad(2.53)$$

（2.2）存在点$z_0=r_0e^{i\alpha}$（$0\leqslant r_0<r$），使$|f^{(k+1)}(z_0)|=1$且$|f^{(k+1)}(z)|\leqslant 1$（$z\in\overline{Oz_0}$）命

$$F(z)=\frac{1}{(1-r_0)^k}f(z_0+(1-r_0)z).$$

应用（2.51）式于$F(Z)$，得

$$\begin{aligned}\log^+ M(\rho,F)&<\frac{K}{1-\rho}\Big(\log^+|F(0)|+\log^+|F^{(k)}(0)|+\log^+\frac{1}{|F^{(k+1)}(0)|}+\log\frac{2}{1-\rho}\Big)\\&\leqslant\frac{K}{1-\rho}\Big(\log\frac{2}{1-\rho}+\log^+|f(z_0)|+(k+1)\log\frac{1}{1-r_0}+\log^+|f^{(k)}(z_0)|\Big)\\&\qquad(0<\rho<1).\end{aligned}$$

再注意到

$$\log^+|f^{(k)}(z_0)|<\log^+|f^{(k)}(0)|+1,$$

$$\log^+|f(z_0)|<(k+2)\log 2+\log^+|f(0)|$$
$$+\log^+|f'(0)|+\cdots+\log^+|f^{(k)}(0)|,$$

并取$Re^{i\alpha}$，使$z_0+(1-r_0)Re^{i\alpha}=\zeta$，则可得

$$\log^+M(r,f)<\frac{K}{1-r}\Big(\log\frac{2}{1-r}+\log^+|f(0)|$$
$$+\log^+|f'(0)|+\cdots+\log^+|f^{(k)}(0)|\Big) \tag{2.54}$$

于$0<r<1$成立．

显然，(2.52)与(2.53)式均为(2.54)式的特殊情形．

我们任意固定r，区分成两种情形．

(1)　当$|z|<\frac{1-r}{4}$时，$f(z)\neq 0$．命

$$F(z)=\left(\frac{4}{1-r}\right)^k f\left(\frac{1-r}{4}z\right).$$

应用引理2.7于函数$F(z)$，有

$$\log^+M(\rho,F)<\frac{K}{1-\rho}\Big(\log\frac{2}{1-\rho}+\log^+|F(0)|\Big)$$
$$(0<\rho<1).$$

特别有

$$\log^+M\Big(\frac{1}{2},F\Big)<2K\Big(\log 4+k\log\frac{4}{1-r}$$
$$+\log^+|f(0)|\Big). \tag{2.55}$$

又因对任一$R>0$，有

$$|f^{(i)}(0)|\leqslant\frac{i!}{R^i}M(R,f)\qquad(i=1,\ 2,\ \cdots),$$

我们取 $R=\frac{1-r}{8}$，并结合（2.55）式，就得

$$\log^+|f^{(i)}(0)|<K\left(\log\frac{2}{1-r}+\log^+|f(0)|\right)$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k).$$

于是，再由（2.54）式可知，

$$\log^+M(r,f)<\frac{K}{1-r}\left(\log\frac{2}{1-r}+\log^+|f(0)|\right).$$

（2） 存在一点 z_0：$|z_0|<\frac{1-r}{4}$，使 $f(z_0)=0$. 于是

$$f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(k)}(z_0)=0.$$

命

$$F(z)=\left(\frac{4}{3+r}\right)^k f\left(z_0+\frac{3+r}{4}z\right),$$

应用（2.54）于$F(z)$，得

$$\log^+M(\rho,F)<\frac{K}{1-\rho}\log\frac{2}{1-\rho}$$

$$(0<\rho<1).$$

注意到

$$M(\rho,F)=\max_{|z-z_0|\leqslant\frac{3+r}{4}\rho}|f(z)|,$$

并取 $\rho=\frac{2+2r}{3+r}$，那么，由于$\frac{3+r}{4}\rho=\frac{1+r}{2}$ 及 $(|z|\leqslant r)$ $\subset\left(|z-z_0|<\frac{1+r}{2}\right)$，而有

$$\log^+M(r, f) < \frac{K}{1-r}\log\frac{2}{1-r}.$$

至此定理2.18′证毕，由此也就证得定理2.18.

Hayman[2]曾猜想：若于区域D全纯的函数族 $\{f(z)\}$ 中，每个函数$f(z)$在D内均满足$f'f^n \neq 1$，其中$n \geq 1$，那么族 $\{f(z)\}$ 在D内正规.

上述猜想当$n \geq 2$时，立即可由定理2.18证实. 事实上，令 $F = \frac{1}{n+1}f^{n+1}$，则由定理2.18知，族 $\{F(z)\}$ 在D内正规. 从而族 $\{f(z)\}$ 也在D内正规. 该猜想当$n=1$时，不久前已为Ощкин[1]所证实. 我们将在第三章§3 5节中讨论这部分内容.

第三章 亚纯函数的正规族

§3.1 定义及其性质

定义3.1 设$f_n(z)$ ($n=1, 2, \cdots$) 为一函数序列均在一区域D内亚纯. 我们称$f_n(z)$在D上内闭一致收敛, 如果对任一点$z_0\in D$,存在一邻域$N(z_0)$($\overline{N(z_0)}\subset D$),使$f_n(z)$或$\frac{1}{f_n(z)}$在$\overline{N(z_0)}$上按通常意义一致收敛.

根据定义, 在区域D上内闭一致收敛的亚纯函数序列$f_n(z)$在D内点点收敛于有穷数或无穷. 对于其极限函数, 我们有

定理3.1 在区域D上内闭一致收敛的亚纯函数序列$f_n(z)$的极限函数$f(z)$在D内或为亚纯函数或恒为∞.

证明 设$f(z)\not\equiv\infty$. 取定一点$z_0\in D$使$f(z_0)\neq\infty$. 任取一点$z^*\in D$, 以下只需证$f(z)$在z^*的某邻域内亚纯. 我们用折线L ($\subset D$) 连接z_0与z^*, 根据有限覆盖定理, 存在有限个相邻的彼此有公共点的圆内部: $C(z_0)$, $C(z_1)$, $\cdots$, $C(z_n)$, $z_n=z^*$, 它们盖住L且在每个圆$\overline{C(z_i)}$ ($i=0, 1, \cdots, n$) 上$f_n(z)$或$\frac{1}{f_n(z)}$一致收敛. 若是前者, 则$f(z)$在$C(z_0)$全纯. 若是后者,

则$\frac{1}{f(z)}$在$C(z_0)$全纯．又因$\frac{1}{f(z_0)}\neq 0$，故$\frac{1}{f(z)}\neq 0$，于是$f(z)$在$C(z_0)$亚纯．由于$f(z)$在$C(z_0)\cap C(z_1)$内亚纯，故在$C(z_1)$内$f(z)\neq\infty$，这样可重复刚才的推理而知$f(z)$在$C(z_1)$内亚纯，如此继续，最后推得$f(z)$在$C(z^*)$内亚纯．

推论　若极限函数$f(z)$在D内某子域内恒为∞，则在D内恒为∞．

内闭一致收敛性在分式线性变换下是不变的．这就是

定理3.2　设亚纯函数序列$f_n(z)$在D上内闭一致收敛，令$g_n(z)=\frac{af_n+b}{cf_n+d}$ $(ad-bc\neq 0,\ n=1,2,\cdots)$，则$g_n(z)$在$D$上也内闭一致收敛．

证明　由于$f_n(z)$内闭一致收敛等价于$\frac{1}{f_n(z)}$内闭一致收敛，另外，当$c=0$时，$g_n=\frac{a}{d}f_n+\frac{b}{d}$，当$c\neq 0$时，$g_n=$

$$\frac{b-\frac{ad}{c}}{cf_n+d}+\frac{a}{c},$$

故我们只需证明若$f_n(z)$在D上内闭一致收敛，则$f_n(z)+\alpha$在D上也内闭一致收敛，其中α为任一复数．今设函数序列$f_n(z)$的极限函数为$f(z)$，若$f(z)\equiv\infty$，则显然序列$f_n(z)+\alpha$也在D上内闭一致收敛．若$f(z)$为亚纯函数，我们任取点$z_0\in D$，先假定$f(z_0)\neq 0,\infty$．于是存在以z_0为心的某圆内部$C_1(z_0)$：$\overline{C_1(z_0)}\subset D$使$f(z)\neq 0,\infty$ $(z\in\overline{C_1(z_0)})$．又根据内闭一致收敛的定义，存在圆$C_2(z_0)$使$\overline{C_2(z_0)}\subset C_1(z_0)$且$f_n(z)$或$\frac{1}{f_n(z)}$在$\overline{C_2(z_0)}$上一致收敛，因而序列$f_n(z)$在

$\overline{C_2(z_0)}$ 上一致收敛于 $f(z)$ 也就是$f_n(z)+\alpha$在 $\overline{C_2(z_0)}$上一致收敛于$f(z)+\alpha$. 再假定$f(z_0)=0$,那么在$f_n(z)$ 及 $\frac{1}{f_n(z)}$中必然是 $f_n(z)$ 在某圆$\overline{C(z_0)}$ 上一致收敛，故$f_n(z)+\alpha$ 也一致收敛.最后假定 $f(z_0)=\infty$，此时$\frac{1}{f_n(z)}$在某圆$\overline{C(z_0)}$ 上一致收敛于$\overline{C(z_0)}$上全纯的函数$\frac{1}{f(z)}$. 因 $\frac{1}{f(z_0)}=0$,故可找到半径适当小的圆$\overline{C_1(z_0)}\subset C(z_0)$ 使当n充分大时在$\overline{C_1(z_0)}$上恒有

$$\left|\frac{\alpha}{f_n(z)}\right|<\frac{1}{2},\qquad\left|\frac{\alpha}{f(z)}\right|<\frac{1}{2}.$$

而

$$\frac{1}{f_n(z)+\alpha}-\frac{1}{f(z)+\alpha}=\frac{1}{f_n(z)}\cdot\frac{1}{1+\frac{\alpha}{f_n(z)}}-\frac{1}{f(z)}\cdot\frac{1}{1+\frac{\alpha}{f(z)}},$$

这说明序列$\frac{1}{f_n(z)+\alpha}$在$\overline{C_1(z_0)}$ 上一致收敛，至此定理证毕.

定义3.2 设 $\{f(z)\}$ 为在一区域D的一族亚纯函数.如果从这个族的每一个函数序列$f_n(z)$ $(n=1,2,\cdots)$ 中可以选出一个子序列 $f_{n_k}(z)$ $(k=1,2,\cdots)$ 在区域D上内闭一致敛，我们称族 $\{f(z)\}$ 在区域D内正规.

定义3.3 设 $\{f(z)\}$ 为区域D内的一族亚纯函数. 我们称族 $\{f(z)\}$ 在区域D内一点z_0正规，如果存在一个属于D的以z_0为心的圆内部$C(z_0)$,使族 $\{f(z)\}$ 在$C(z_0)$内正规.

以下我们给出几个简单性质.

定理3.3 设 $\{f(z)\}$ 为区域D内的亚纯函数族. 这个族在D内正规的充要条件是它在D内每点正规.

根据引理2.2、有限覆盖定理及对角线方法，不难证明上述定理.

应用定理3.2，立即有

定理3.4 亚纯函数族在分式线性变换下正规性不变.

定理3.5 对于全纯函数族，两个正规性定义（即定义2.4与定义3.2）是等价的.

证明 显然只需证按定义3.2正规的全纯函数族按定义2.4也正规. 设区域D内一全纯函数族 $\{f(z)\}$ 按定义3.2正规. 任取函数序列$f_n(z)\in\{f(z)\}$，于是存在一子列$f_{n_k}(z)$ 按定义3.1在区域D上内闭一致收敛于$g(z)$，我们区分两种情形：（1）$g(z)\equiv\infty$. 于是对任一点$z\in D$，存在一圆域$\overline{C(z)}\subset D$，使在$\overline{C(z)}$上$\frac{1}{f_{n_k}(z)}$一致趋于零，即$f_{n_k}(z)$ 一致趋于∞. 据有限覆盖定理知，$f_{n_k}(z)$ 在D上内闭一致趋于无穷. （2）$g(z)$为D内亚纯函数。根据有限覆盖定理，我们只需证明，对任一点$z_0\in D$，存在一圆域$\overline{C(z_0)}\subset D$使$f_{n_k}(z)$ 在$\overline{C(z_0)}$上一致收敛. 按定义3.1的内闭一致收敛性，存在$\overline{C_1(z_0)}\subset D$ 使$f_{n_k}(z)$ 或 $\frac{1}{f_{n_k}(z)}$在$\overline{C_1(z_0)}$上一致收敛，若是后者，则$\frac{1}{g(z)}$在$C_1(z_0)$ 内全纯，又因$\frac{1}{f_{n_k}(z)}\neq 0$及$\frac{1}{g(z)}\not\equiv 0$故$\frac{1}{g(z)}\neq 0\ (z\in C_1(z_0))$. 任取出圆域$\overline{C(z_0)}$

$\subset C_1(z_0)$，于是$\dfrac{1}{f_{n_k}(z)}$在$\overline{C(z_0)}$上一致收敛于$\dfrac{1}{g(z)}$，从而

$f_{n_k}(z)$在$\overline{C(z_0)}$上一致收敛，至此定理证毕.

定理3.6 设$\{f(z)\}$为区域D内的亚纯函数族. 若对任一点$z_0\in D$，存在圆域$C(z_0)\subset D$及一正数K，使对任一$f(z)\in\{f(z)\}$在$C(z_0)$内或者恒有$|f(z)|\leqslant K$或者恒有$\left|\dfrac{1}{f(z)}\right|\leqslant K$，则族$\{f(z)\}$在$D$内正规.

根据定理3.3，定理3.4，定理3.5及定理2.2，我们不难证明定理3.6.

对于亚纯函数族，我们还可给出关于正规性的另一个等价定义. 首先引进球面距离（简称球距）的概念.

定义3.4 设z_1，z_2为二复数（有穷或无穷），我们称下面的非负实数为z_1与z_2间的球面距离，记作$|z_1, z_2|$：

$$|z_1,z_2|=\begin{cases}\dfrac{|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}} & z_1\neq\infty,\ z_2\neq\infty,\\ \dfrac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}} & z_1\neq\infty,\ z_2=\infty,\\ 0 & z_1=\infty,\ z_2=\infty.\end{cases}$$

根据定义不难验证

$$|z_1, z_2|\leqslant|z_1-z_2|\quad(z_1\neq\infty,\ z_2\neq\infty),\tag{3.1}$$

$$|z_1, z_3|\leqslant|z_1, z_2|+|z_2, z_3|,\tag{3.2}$$

$$|z_1, z_2|=\left|\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right|,\tag{3.3}$$

$$\log\frac{1}{|z_1-z_2|}+\log^+|z_1|+\log^+|z_2|\leqslant\log\frac{1}{|z_1, z_2|},$$

$$(z_1 \neq \infty,\ z_2 \neq \infty,\ z_1 \neq z_2) \qquad (3.4)$$

类似于哥西准则，我们有

定理3.7 序列 $\{a_n\}$（a_n有穷或无穷）的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在[1)]（有穷或无穷）的充要条件是任给$\varepsilon>0$，存在正整数N，使当$m,n\geqslant N$时，$|a_n,\ a_m|<\varepsilon$.

证明 条件的必要性是易证的.事实上，可应用哥西准则及(3.2)与(3.3)式即可证得.现在来证条件是充分的.先假定可取出序列a_n的一子序列$a_{n_k}\neq\infty(k=1,\ 2\cdots)$使$a_{n_k}\to a(k\to\infty$，$a$为有穷或无穷）. 再根据条件，对任给$\varepsilon>0$,存在正整数$N$，当$m$、$n\geqslant N$时，$|a_m,a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$，取充分大的$k$，使$n_k\geqslant N$且$|a_{n_k},\ a|<\frac{\varepsilon}{2}$，于是当$n\geqslant N$时，$|a_n,\ a|\leqslant|a_n,\ a_{n_k}|+|a_{n_k},\ a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$,这表示 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n,\ a|=0$,

故

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

若序列 $\{a_n\}$ 中不存在上述的子序列a_{n_k}，那么除去有限个外，a_n均为无穷，这时仍有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在.

定义3.5 我们称一函数序列$f_n(z)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ ($f_n(z)$可取值无穷）在一集E上按球距一致收敛，如果任给$\varepsilon>0$，存在$N>0$使当n，$m>N$时，$|f_n(z),f_m(z)|<\varepsilon$ $(z\in E)$.

定义3.6 设 $f_n(z)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 为一函数序列均在一

1) 若$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n,\ a|=0$ 则称极限$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在，记作$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$

区域D内亚纯. 我们称$f_n(z)$在D上按球距内闭一致收敛，如果$f_n(z)$在D内任一有界闭域上按球距一致收敛。根据定理3.7，$f_n(z)$在D内点点收敛于有穷值或无穷，即存在可取无穷的极限函数。

对于亚纯函数序列，它在D上内闭一致收敛与它在D上按球距内闭一致收敛是等价的，这就是

定理3.8 设$f_n(z)(n=1，2，\cdots)$为区域D内的亚纯函数序列，则$f_n(z)$在D上内闭一致收敛的充要条件是$f_n(z)$在D上按球距内闭一致收敛.

证明 先证条件是必要的. 设$f(z)$为极限函数，任致一点$z_0\in D$. 由内闭一致收敛性，存在一圆域$\overline{C(z_0)}\subset D$使在$\overline{C(z_0)}$上或者$f_n(z)$一致收敛于$f(z)$，或者$\frac{1}{f_n(z)}$一致收敛于$\frac{1}{f(z)}$.

若是前者，则因$|f_n(z),\ f(z)|\leqslant|f_n(z)-f(z)|$，从而$f_n(z)$在$\overline{C(z_0)}$上按球距一致收敛. 若是后者，由$|f_n(z),f(z)|=\left|\frac{1}{f_n(z)},\frac{1}{f(z)}\right|\leqslant\left|\frac{1}{f_n(z)}-\frac{1}{f(z)}\right|$，同样可知$f_n(z)$在$\overline{C(z_0)}$上按球距一致收敛. 再由有限覆盖定理知$f_n(z)$在$D$上按球距一致收敛.

再证条件是充分的. $f_n(z)$的极限函数仍记为$f(z)$. 任取定点. $z_0\in D$，只需证存在某圆域$\overline{C(z_0)}\subset D$使$f_n(z)$或$\frac{1}{f_n(z)}$在在$\overline{C(z_0)}$上一致收敛. 我们分两种情形进行讨论：

(1) $f(z_0)=\infty$，根据球距内闭一致收敛的定义，对于任取定的圆域$\overline{C_1(z_0)}\subset D$，存在正整数$N$，使当$z\in\overline{C_1(z_0)}$时，$|f(z),\ f_N(z)|<\frac{1}{7}$. 又因$f_N(z)$为亚纯函数，故存在一圆域

$\overline{C(z_0)}\subset C_1(z_0)$，使当$z\in\overline{C(z_0)}$时，$|f_N(z),\ f_N(z_0)|<\frac{1}{7}$. 于是当 $z\in\overline{C(z_0)}$ 时，

$$
\begin{aligned}
|f(z),\ f(z_0)| &\leqslant |f(z), f_N(z)| + |f_N(z), f_N(z_0)| \\
&\quad + |f_N(z_0), f(z_0)| < \frac{3}{7}. \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

由此推出

$$
|f(z)| > 2 .
$$

对任意给定的正 数$\varepsilon(<\frac{1}{16})$，按球距内闭一致收敛的定义，存在正整数$n_0$，使当$n\geqslant n_0$ 且 $z\in\overline{C(z_0)}$ 时，$|f_n(z),\ f(z)|<\varepsilon$，再由（3.5）式，有

$$
|f_n(z),\ \infty| \leqslant |f_n(z),\ f(z)| + |f(z),\ \infty| < \frac{1}{16} + \frac{3}{7} < \frac{1}{2}
$$

$$
(z\in\overline{C(z_0)}) .
$$

由此可推出$|f_n(z)|>\sqrt{3}$. 因而$\frac{1}{f_n(z)}$ 与$\frac{1}{f(z)}$在$\overline{C(z_0)}$ 上全纯

且

$$
\begin{aligned}
|f_n(z),\ f(z)| = \left|\frac{1}{f_n},\ \frac{1}{f}\right| &= \left|\frac{1}{f_n} - \frac{1}{f}\right| \frac{1}{\sqrt{1+\left|\frac{1}{f_n}\right|^2}} \\
&\quad \times \frac{1}{\sqrt{1+\left|\frac{1}{f}\right|^2}} \geqslant \sqrt{\frac{3}{5}}\left|\frac{1}{f_n} - \frac{1}{f}\right|.
\end{aligned}
$$

故

$$
\left|\frac{1}{f_n} - \frac{1}{f}\right| \leqslant \sqrt{\frac{5}{3}}\left|f_n(z),\ \ f(z)\ \right| < \sqrt{\frac{5}{3}}\,\varepsilon,(z\in\overline{C(z_0)}),
$$

（2）$f(z_0)\neq\infty$. 与情形（1）开始的证明类似，存在$\overline{C(z_0)}\subset D$，使当$z\in\overline{C(z_0)}$时，$|f(z)|\leqslant M$，其中$M$为一正常数. 取正整数$N$，使当$n\geqslant N$时

$$|f_n(z),\ f(z)|<\frac{\varepsilon}{2\sqrt{1+M^2}}\qquad (z\in\overline{C(z_0)}).$$

于是当$z\in\overline{C(z_0)}$及$n\geqslant N$时，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+M^2}}&\leqslant\frac{1}{\sqrt{1+|f(z)|^2}}=|f(z),\ \infty|\\&\leqslant|f(z),\ f_n(z)|+|f_n(z),\ \infty|\\&<\frac{1}{2\sqrt{1+M^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+|f_n|^2}},\end{aligned}$$

即
$$\sqrt{1+|f_n|^2}<2\sqrt{1+M^2},$$
从而

$$\begin{aligned}|f_n(z)-f(z)|=&\sqrt{1+|f_n(z)|^2}\sqrt{1+|f(z)|^2}\\&\times|f_n(z),\ f(z)|\end{aligned}$$

在$\overline{C(z_0)}$上一致趋于零. 至此定理证毕.

由定理3.8及定理3.1立即有

推论 在区域D上按球距内闭一致收敛的亚纯函数序列的极限函数或为D内亚纯函数或在D内恒为无穷.

由定理3.8及定理3.2立即有

定理3.9 区域D内的亚纯函数序列$f_n(z)$若在D上按球距内闭一致收敛，则$g_n(z)=\dfrac{af_n+b}{cf_n+d}$ $(ad-bc\neq0,\ n=1,2,\cdots)$在D上也按球距内闭一致收敛.

最后，由定理3.8可得关于正规性的一个等价条件.

定理3.10　设 $\{f(z)\}$ 为区域D内的亚纯函数族．这个族在D内正规的充要条件是从这个族中每个函数序列 $f_n(z)(n=1,2,\cdots)$ 可以选出一个子序列 $f_{n_k}(z)$ $(k=1,2,\cdots)$ 在区域 D 上按球距内闭一致收敛．

§3.2　Marty 正规定则及其推广

1931年，F. Marty[1]建立了一个著名的关于亚纯函数族的正规定则．有趣的是这个定则所需的条件不仅充分而且必要，我们通常称为 Marty 正规定则．

定理3.11　设 $\{f(z)\}$ 为区域D的一族亚纯函数，则族 $\{f(z)\}$ 在D内正规的充要条件是，对任一有界闭域$\overline{G}\subset$ D，存在一正数 $M=M(\overline{G})$，使对每个 $f(z)\in\{f(z)\}$，恒有

$$\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}\leqslant M \qquad (z\in\overline{G}).$$

证明　先证条件的必要性．我们用反证法．假定对某一有界闭域$\overline{G}\subset$ D，存在函数序列 $f_n(z)\in\{f(z)\}$ 及点列$z_n\in\overline{G}$，使

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|f_n'(z_n)|}{1+|f_n(z_n)|^2}=+\infty. \tag{3.6}$$

不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z_0$．于是$z_0\in\overline{G}$．由 $\{f(z)\}$ 的正规性可选出子序列 $f_{n_k}(z)$ 在一圆域 $\overline{C(z_0)}\subset$ D上或者 $f_{n_k}(z)$ 一致收敛于全纯函数 $g(z)$，或者 $\dfrac{1}{f_{n_k}(z)}$ 一致收敛于某全纯函数．由于

$$\frac{|f_{n_k}'(z)|}{1+|f_{n_k}(z)|^2}=\frac{\left|\left(\frac{1}{f_{n_k}(z)}\right)'\right|}{1+\left|\frac{1}{f_{n_k}(z)}\right|^2},$$

故我们只需对前者的情形加以讨论．任取圆域$\overline{C^*(z_0)}\subset C(z_0)$，显然$f_{n_k}'(z)$ $(k=1,2,\cdots)$ 在$\overline{C^*(z_0)}$上一致收敛，故存在$K>0$使

$$\frac{|f_{n_k}'(z)|}{1+|f_{n_k}(z)|^2}\leqslant|f_{n_k}'(z)|\leqslant K\quad(k=1,2,\cdots,z\in\overline{C^*(z_0)}).$$

但当k充分大时，$z_{n_k}\in C^*(z_0)$，从而与（3.6）式矛盾．

现再证条件的充分性．任取点$z_0\in D$及圆域$\overline{C(z_0)}$，$|z-z_0|\leqslant\delta$使$\overline{C(z_0)}\subset D$．根据条件，存在数$M$，使

$$\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}\leqslant M\qquad(z\in\overline{C(z_0)},\ f\in\{f(z)\})$$

任取$f\in\{f(z)\}$，令$z=z_0+re^{i\theta}$　$(0<r\leqslant\delta)$及

$$h(t)=\operatorname{arctg}|f(z_0+te^{i\theta})|\qquad(0\leqslant t\leqslant r).$$

于是

$$\left|\operatorname{arctg}|f(z)|-\operatorname{arctg}|f(z_0)|\right|$$

$$=|h(r)-h(0)|=\left|\int_0^r\frac{dh}{dt}dt\right|$$

$$=\left|\int_0^r\frac{\frac{\partial}{\partial t}|f(z_0+te^{i\theta})|}{1+|f(z_0+te^{i\theta})|^2}dt\right|\leqslant\int_0^r\frac{\left|\frac{\partial}{\partial t}|f(z_0+te^{i\theta})|\right|}{1+|f(z_0+te^{i\theta})|^2}dt.$$

再令$f=u+iv$，则

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}|f(z_0+te^{i\theta})|\right| = \left|\frac{uu'+vv'}{\sqrt{u^2+v^2}}\right| \leqslant \sqrt{(u')^2+(v')^2}$$

$$= \left|\frac{\partial}{\partial t}f(z_0+te^{i\theta})\right| = |f'(z_0+te^{i\theta})|.$$

故

$$|\operatorname{arctg}|f(z)| - \operatorname{arctg}|f(z_0)|| \leqslant \int_0^r \frac{|f'(z_0+te^{i\theta})|}{1+|f(z_0+te^{i\theta})|^2}dt$$

$$\leqslant Mr = M|z-z_0|$$

$$(z\in \overline{C(z_0)}).$$

于是若$|z-z_0| \leqslant \min\left\{\delta, \frac{\pi}{12M}\right\}$，则当$|f(z_0)| \leqslant 1$时，

$$\operatorname{arctg}|f(z)| \leqslant \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}.$$

因而$|f(z)| \leqslant \sqrt{3}$. 而当$|f(z_0)| > 1$时，

$$\operatorname{arctg}|f(z)| > \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6},$$

由此得$|f(z)| > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

再根据定理3.6就知$\{f(z)\}$在D内正规，至此定理证毕.

由此定理立即得A·Hess[1]的一个结果.

推论　区域D内的一切亚纯函数所组成的函数族可表示成可列个正规族的和集.

不久前，李松鹰和谢晖春[1]推扩了Marty正规定则.

定理3.11′　设$\{f(z)\}$为区域D的一族亚纯函数，且族中每一函数$f(z)$在D内的一切零点的级均不小于k，则族$\{f(z)\}$在D内正规的充要条件是对D中任一有界闭子域$\overline{G}$，均存在一正

数 $M=M(\overline{G})$，使对任一 $f(z)\in\{f(z)\}$ 恒有

$$\frac{|f^{(k)}(z)|}{1+|f(z)|^{k+1}}\leqslant M \qquad (z\in\overline{G}) . \qquad (3.7)$$

证明 先证条件的充分性．任取定D内一点 z_0，再取正数 δ 使$(|z-z_0|\leqslant\delta)\subset D$．据定理条件，存在正数 M 使对任一 $f(z)\in\{f(z)\}$ 在圆域$|z-z_0|\leqslant\delta$上满足（3.7）式．令

$$\delta_1=\min\left\{1,\ \frac{\delta}{2},\ \left(\frac{1}{2^{k+2}M}\right)^{\frac{1}{k}}\right\}.$$

我们区分为两种情形．

（1） 在圆域$|z-z_0|\leqslant\frac{\delta_1}{2}$上恒有

$$|f(z)|+|f'(z)|+\cdots+|f^{(k-1)}(z)|\geqslant 1 . \qquad (3.8)$$

此时，我们再区分成两种情况．

(1.1) 在$|z-z_0|\leqslant\frac{1}{8}\delta_1$上恒有$|f(z)|<1$或恒有

$$|f(z)|>1 .$$

(1.2) 在$|z-z_0|\leqslant\frac{1}{8}\delta_1$上存在一点 z_1使$|f(z_1)|=1$．

由定理条件及（3.8）可知，$f(z)$ 在$|z-z_0|\leqslant\frac{1}{2}\delta_1$上无零点，且当 $0<r<\frac{3}{8}\delta_1$时，有

$$m\left(r,\ z_1,\ \frac{1}{f}\right)\leqslant m\left(r,\ z_1,\ \frac{f'}{f}\right)+\cdots$$

$$+m\left(r,\ z_1,\ \frac{f^{(k-1)}}{f}\right)+\log(k+1).$$

再由定理1.13′，引理2.5及

$$T(r, z_1, f) = T\left(r, z_1, \frac{1}{f}\right) = m\left(r, z_1, \frac{1}{f}\right),$$

我们就有

$$T\left(r, z_1, \frac{1}{f}\right) < K\left\{1 + \log^+\frac{1}{r} + \log^+\delta_1 + \log^+\frac{1}{\frac{3}{8}\delta_1 - r}\right\}$$

$$\left(0 < r < \frac{3}{8}\delta_1\right).$$

于是

$$M\left(\frac{\delta_1}{8}, z_0, \frac{1}{f}\right) \leqslant M\left(\frac{2\delta_1}{8}, z_1, \frac{1}{f}\right) \leqslant \frac{\frac{5}{16} + \frac{2}{8}}{\frac{5}{16} - \frac{2}{8}}$$

$$\times T\left(\frac{5}{16}, z_1, \frac{1}{f}\right) < K.$$

（2） 在圆域 $|z - z_0| \leqslant \frac{\delta_1}{2}$ 上存在一点 z_2，使

$$|f(z_2)| + |f'(z_2)| + \cdots + |f^{(k-1)}(z_2)| < 1. \tag{3.9}$$

这时我们要证明

$$M(\delta_1, z_2, f) < 2. \tag{3.10}$$

假定不对，则存在一点 ζ：$|\zeta - z_2| \leqslant \delta_1$ 使 $|f(\zeta)| = 2$，且在圆域 $|z - z_2| \leqslant |\zeta - z_2|$ 上恒有 $|f(z)| \leqslant 2$. 由此及（3.7）和（3.9）式，通过逐次积分，有

$$2 = |f(\zeta)| \leqslant 1 + M(1 + 2^{k+1})|\zeta - z_2|^k$$

$$< 1 + M\cdot 2^{k+2}|\zeta - z_2|^k.$$

于是结合 δ_1 的取法，得

$$|\zeta - z_2| > \left(\frac{1}{2^{k+2}M}\right)^{\frac{1}{k}} \geqslant \delta_1,$$

这就与ζ的取法矛盾. 因此(3.10)式成立

从 (3.10) 式立即有

$$M\left(\frac{\delta_1}{2}, z_0, f\right) \leqslant M(\delta_1, z_2, f) < 2.$$

这样我们就证明了在圆域$|z - z_0| \leqslant \frac{\delta_1}{8}$上，对于族 $\{f(z)\}$ 中每一函数$f(z)$或者恒有$|f(z)| < K$,或者恒有$\left|\frac{1}{f(z)}\right| < K$，因此族 $\{f(z)\}$ 在点z_0正规. 再由z_0取法的任意性可知 $\{f(z)\}$ 在D内正规

现再证条件是必要的. 假定条件不是必要的，则存在一点列$z_n \in D$ $(n = 1, 2, \cdots)$，$z_n \to z_0 \in D$及存在一函数序列$f_n(z) \in \{f(z)\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$，使

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|f_n^{(k)}(z_n)|}{1 + |f_n(z_n)|^{k+1}} = +\infty. \tag{3.11}$$

由于族 $\{f(z)\}$ 在 D内正规，故可取到正数δ使 $(|z - z_0| \leqslant 2\delta) \subset D$ 且可从序列 $f_n(z)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 中选取一子序列，不妨仍设为$f_n(z)$ 在 $(|z - z_0| \leqslant 2\delta)$ 上一致趋于全纯函数 $\varphi(z)$ 或 $\frac{1}{f_n(z)}$ 在 $(|z - z_0| \leqslant 2\delta)$ 上一致趋于全纯函数$\psi(z)$。

对于前者，在$|z - z_0| \leqslant \delta$上就一致地有

$$\frac{|f_n^{(k)}(z)|}{1 + |f_n(z)|^{k+1}} \longrightarrow \frac{|\varphi^{(k)}(z)|}{1 + |\varphi(z)|^{k+1}} \quad (n \to +\infty).$$

这与 (3.11) 矛盾。

对于后者，令

$$M = 1 + \max_{|z-z_0|\leqslant 2\delta} |\psi(z)|.$$

则当n充分大时，在$|z-z_0|\leqslant 2\delta$上有

$$\left|\frac{1}{f_n(z)}\right| \leqslant M. \tag{3.12}$$

于是根据哥西积分公式及（3.11）式，我们有

$$\left|\left(\frac{1}{f_n(z)}\right)^{(j)}\right| \leqslant \frac{j! M}{\delta^j} \quad (j=1,2,\cdots,k,\ |z-z_0|\leqslant\delta). \tag{3.13}$$

另外

$$\frac{f_n^{(k)}}{f_n^{k+1}} = -\frac{1}{f_n^{k-1}}\left(\frac{1}{f_n}\right)^{(k)} + P_{k-1}\left(\frac{f_n'}{f_n^2}, \frac{f_n''}{f_n^3}, \cdots, \frac{f_n^{(k-1)}}{f_n^k}\right), \tag{3.14}$$

其中 P_{k-1}为$k-1$ 次的整系数多项式. 由（3.12），（3.13）及（3.14）式可知，当n充分大时，在（$|z-z_0|\leqslant\delta$）上有

$$\frac{|f_n^{(k)}(z)|}{1+|f_n(z)|^{k+1}} \leqslant \left|\frac{f_n^{(k)}(z)}{(f_n(z))^{k+1}}\right| \leqslant KM,$$

其中 K 为仅与k和δ有关的正常数. 上式又与（3.11）式矛盾，至此必要性也证得.

§3.3 Miranda 正规定则的推广

Miranda 正规定则（定理2.9）告诉我们，对于一个全纯函

数族 $\{f(z)\}$，若族中每个函数 $f(z)$ 均满足两个条件：$f\neq 0$ 及 $f^{(k)}\neq 1$，那么函数族 $\{f(z)\}$ 正规. 对于一个亚纯函数族 $\{f(z)\}$，如何建立相应的正规定则？由于把全纯函数作为亚纯函数看待时，实际上附加了函数不取无穷值这样的条件，因此人们自然会认为建立亚纯函数族的相应正规定则时应需三个条件. 1959年，Hayman[1]获得了一个十分重要的结果(我们通常称为 Hayman 不等式)，他指出，对于亚纯函数 $f(z)$，只要 $f(z)$ 的一个密指量和 $f^{(k)}(z)$ 的一个密指量，便可界囿 $T(r,f)$. Hayman不等式启示人们提出这样的问题：对于亚纯函数族 $\{f(z)\}$，当族中每个函数 $f(z)$ 满足的条件与 Miranda 正规定则的条件一样，即 $f\neq 0$ 及 $f^{(k)}\neq 1$，族 $\{f(z)\}$ 是否仍保持正规性？Hayman[2]也于1967年提出这个猜想。作者[2]于1979年证实了这个猜想. 杨乐[1]通过修改 Hayman 不等式的余项简化了上述猜想的证明. 我们首先建立 Hayman 不等式.

定理3.12 设 $f(z)$ 于 $|z|<R$ $(\leqslant\infty)$ 亚纯. 若 k 为一正整数且

$$f(0)\neq 0,\ \infty;\ f^{(k)}(0)\neq 1;\ f^{(k+1)}(0)\neq 0;$$
$$(k+1)f^{(k+2)}(0)(f^{(k)}(0)-1)-(k+2)f^{(k+1)}(0)^2\neq 0,$$

则当 $0<r<R$ 时，有

$$T(r,f)<\left(2+\frac{1}{k}\right)N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\left(2+\frac{2}{k}\right)\times\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)+S(r,f),$$

其中

$$S(r,f)=\left(2+\frac{2}{k}\right)m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)$$

$$+\left(2+\frac{2}{k}\right)\left\{m\left(r,\ \frac{f^{(k+1)}}{f}\right)\right.$$

$$\left.+m\left(r,\ \frac{f^{(k)}}{f}\right)\right\}+\frac{1}{k}m\left(r,\ \frac{f^{(k+2)}}{f^{(k+1)}}\right)$$

$$+\ 4+\left(2+\frac{1}{k}\right)\log\left|\frac{f(0)(f^{(k)}(0)-1}{f^{(k+1)}(0)}\right|$$

$$+\frac{1}{k}\log\left|\frac{f^{(k+1)}(0)(f^{(k)}(0)-1)}{(k+1)f^{(k+2)}(0)(f^{(k)}(0)-1)-(k+2)f^{(k+1)}(0)^{2}}\right|$$

证明 令

$$g(z)=\frac{\left(f^{(k+1)}(z)\right)^{k+1}}{(f^{(k)}(z)-1)^{k+2}}.$$

首先证明当$0<r<R$时，有

$$kN_{1)}(r,\ f)\leqslant\overline{N}_{(2}(r,\ f)+\overline{N}\left(r,\ \frac{1}{f^{(k)}-1}\right)$$

$$+N_{0}\left(r,\ \frac{1}{f^{(k+1)}}\right)$$

$$+m\left(r,\ \frac{g'}{g}\right)+\log\left|\frac{g(0)}{g'(0)}\right|,\qquad(3.15)$$

其中$N_{1)}(r,\ f)$表示$f(z)$的单极点密指量，$\overline{N}_{(2}(r,\ f)$表示$f(z)$的重级极点的精简密指量，$N_{0}\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)$表示$f^{(k+1)}(z)$的零点但不是$f^{(k)}(z)-1$的零点的密指量.

事实上，若z_0为$f(z)$的一个单级极点，则在z_0的邻域内，有

$$f(z)=\frac{a}{z-z_0}+O(1) \qquad (a\neq 0) \qquad (3.16)$$

对上式两边求 k 阶导数得

$$f^{(k)}(z)-1=\frac{(-1)^k a k!}{(z-z_0)^{k+1}}+O(1)$$

$$=\frac{(-1)^k a k!}{(z-z_0)^{k+1}}\left\{1+O((z-z_0)^{k+1})\right\}.$$

对 (3.16) 式两边求 $k+1$ 阶导数，得

$$f^{(k+1)}(z)=\frac{(-1)^{k+1}a(k+1)!}{(z-z_0)^{k+2}}$$

$$\times\left\{1+O((z-z_0)^{k+2})\right\}.$$

因此，在 z_0 的邻域内，有

$$g(z)=\frac{-(k+1)^{k+1}}{ak!}\left\{1+O((z-z_0)^{k+1})\right\}.$$

由此可知，$g(z_0)\neq 0$，∞且 z_0 至少为 $g'(z)$ 的 k 级零点.

应用 Jensen 公式于 $\frac{g'(z)}{g(z)}$，得

$$N\left(r,\ \frac{g}{g'}\right)-N\left(r,\ \frac{g'}{g}\right)$$

$$=m\left(r,\ \frac{g'}{g}\right)-m\left(r,\ \frac{g}{g'}\right)-\log\left|\frac{g'(0)}{g(0)}\right|. \qquad (3.17)$$

而上式左端为

$$N(r,\ g)-N(r,\ g')+N\left(r,\ \frac{1}{g'}\right)-N\left(r,\ \frac{1}{g}\right)$$

$$=N\left(r,\ \frac{1}{g'}\right)-\overline{N}(r,\ g)\ -N\left(r,\ \frac{1}{g}\right)$$

$$=N_0\left(r,\ \frac{1}{g'}\right)-\overline{N}(r,\ g)\ -\ \overline{N}\left(r,\ \frac{1}{g}\right),\tag{3.18}$$

其中$N_0(r,\ \frac{1}{g'})$表示$|z|\leqslant r$上$g'(z)$的零点而不是$g(z)$的零点的密指量.

由(3.17)及(3.18)式，有

$$N_0\left(r,\ \frac{1}{g'}\right)\leqslant\overline{N}(r,\ g)\ +\overline{N}\left(r,\ \frac{1}{g}\right)+m\left(r,\ \frac{g'}{g}\right)$$

$$+\log\left|\frac{g(0)}{g'(0)}\right|.\tag{3.19}$$

根据$g(z)$的表达式，$g(z)$的零点和极点仅可能在$f(z)$的重极点，$f^{(k+1)}(z)$的零点和$f^{(k)}(z)-1$的零点处出现，于是

$$\overline{N}(r,\ g)\ +\overline{N}\left(r,\ \frac{1}{g}\right)\leqslant\overline{N}_{(2}(r,\ f)$$

$$+\overline{N}\left(r,\ \frac{1}{f^{(k)}-1}\right)$$

$$+N_0\left(r,\ \frac{1}{f^{(k+1)}}\right).\tag{3.20}$$

另外，证明开始时已指出$f(z)$的单级极点必为$g'(z)$的重级至少为k的零点且不是$g(z)$的零点，于是

$$kN_{1)}(r,\ f)\ \leqslant N_0\left(r,\ \frac{1}{g'}\right).\tag{3.21}$$

综合(3.19)，(3.20)及(3.21)式就得(3.15)式.

现在应用Milloux不等式（即定理1.12），当$0<r<R$

时，有

$$T(r, f) < \overline{N}(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right)$$

$$+ N\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - 1}\right) - N\left(r, \frac{1}{f^{(k+1)}}\right)$$

$$+ m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f}\right)$$

$$+ m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)} - 1}\right)$$

$$+ \log\left|\frac{f(0)(f^{(k)}(0) - 1)}{f^{(k+1)}(0)}\right| + \log 2. \tag{3.22}$$

下面我们设法消去上式右端的$\overline{N}(r, f)$. 由 (3.22) 式，

$$\overline{N}_{(2}(r, f) \leqslant N(r, f) - \overline{N}(r, f) \leqslant T(r, f) - N(r, f)$$

$$\leqslant N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - 1}\right)$$

$$- N_0\left(r, \frac{1}{f^{(k+1)}}\right) + m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right)$$

$$+ m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f}\right) + m\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)} - 1}\right)$$

$$+ \log\left|\frac{f(0)(f^{(k)}(0) - 1)}{f^{(k+1)}(0)}\right| + \log 2.$$

再结合 (3.15) 式，得

$$\overline{N}(r, f) = N_{1)}(r, f) + \overline{N}_{(2}(r, f)$$

$$\leqslant \left(1 + \frac{1}{k}\right)\overline{N}_{(2}(r, f) + \frac{1}{k}\left\{\overline{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - 1}\right)\right.$$

$$+N_0\left(r,\ \frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+m\left(r,\ \frac{g'}{g}\right)$$

$$+\log\left|\frac{g(0)}{g'(0)}\right|\Bigg\}$$

$$\leqslant\left(1+\frac{1}{k}\right)\left\{N\left(r,\ \frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)\right.$$

$$-N_0\left(r,\ \frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+m\left(r,\ \frac{f^{(k)}}{f}\right)$$

$$+m\left(r,\ \frac{f^{(k+1)}}{f}\right)+m\left(r,\ \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)$$

$$+\log\left|\frac{f(0)(f^{(k)}(0)-1)}{f^{(k+1)}(0)}\right|+\log 2\Bigg\}$$

$$+\frac{1}{k}\left\{\overline{N}\left(r,\ \frac{1}{f^{(k)}-1}\right)\right.$$

$$+N_0\left(r,\frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+m\left(r,\ \frac{g'}{g}\right)$$

$$+\log\left|\frac{g(0)}{g'(0)}\right|\Bigg\}. \tag{3.23}$$

而

$$\frac{g'(z)}{g(z)}=\frac{(k+1)f^{(k+2)}(z)}{f^{(k+1)}(z)}$$

$$-\frac{(k+2)f^{(k+1)}(z)}{f^{(k)}(z)-1},$$

故

$$m\left(r,\ \frac{g'}{g}\right)\leqslant m\left(r,\ \frac{f^{(k+2)}}{f^{(k+1)}}\right)+m\left(r,\ \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)$$

$$+\log(k+2)+\log 2, \tag{3.24}$$

$$\log\left|\frac{g(0)}{g'(0)}\right|$$

$$=\log\left|\frac{f^{(k+1)}(0)(f^{(k)}(0)-1)}{(k+1)f^{(k+2)}(0)(f^{(k)}(0)-1)-(k+2)f^{(k+1)}(0)^2}\right|$$

(3.25)

综合（3.22）、（3.23）、（3.24）及（3.25）式就证明了定理的结论．

现在我们把 Miranda 正规定则推广到亚纯函数族的情形．

定理3.13 设 $\{f(z)\}$ 为区域D内的亚纯函数族，k为一正整数．若族 $\{f(z)\}$ 中每个函数$f(z)$ 在D内满足：$f(z)\neq 0$，$f^{(k)}(z)\neq 1$，则族 $\{f(z)\}$ 在D内正规．

证明 根据定理3.6，我们只需证明对任一点 $z_0\in D$及 z_0的任一邻域$|z-z_0|<r$：（$|z-z_0|<r$）$\subset D$，存在一正数K，使对任一$f(z)\in\{f(z)\}$，在圆$|z-z_0|<\frac{r}{64}$内或者恒有$|f(z)|<K$，或者恒有$\left|\frac{1}{f(z)}\right|<K$．命$F(z)=\frac{1}{r^k}f(rz+z_0)$，于是$F(z)$在$|z|<1$内亚纯且

$$F(z)\neq 0,\quad F^{(k)}(z)\neq 1\quad(|z|<1).$$

区分两种情形：

（1） 在圆 $|z|<\frac{1}{16}$内，恒有

$$|F(z)|+|F'(z)|+\cdots+|F^{(k)}(z)|+|F^{(k+1)}(z)|\geqslant\frac{1}{8}.$$

此时再分两种情形．

（1.1） 在圆$|z|<\frac{1}{64}$内或者恒有 $|F(z)|<1$或者恒有

$|F(z)|>1$.

(1.2)　在圆$|z|<\frac{1}{64}$内存在一点z_1，使$|F(z_1)|=1$. 于是当$0<r<\frac{1}{16}$时，有

$$m\left(r, z_1, \frac{1}{F}\right)<\sum_{j=1}^{k+1} m\left(r, z_1, \frac{F^{(j)}}{F}\right)+\log 8(2+k).$$

再应用定理1.13′和引理2.5就有

$$T\left(\frac{3}{64}, z_1, \frac{1}{F}\right)<K.$$

于是

$$\log^+ M\left(\frac{1}{32}, z_1, \frac{1}{F}\right)<K.$$

又因$\left(|z|\leqslant\frac{1}{64}\right)\subset\left(|z-z_1|\leqslant\frac{1}{32}\right)$，故

$$\log^+ M\left(\frac{1}{64}, \frac{1}{F}\right)<K.$$

(2)　在圆$|z|<\frac{1}{16}$内存在一点z_2，使

$$|F(z_2)|+|F'(z_2)|+\cdots+|F^{(k)}(z_2)|+|F^{(k+1)}(z_2)|<\frac{1}{8}. \tag{3.26}$$

我们又区分两种情形.

(2.1)　在圆$|z|<\frac{1}{16}$内，恒有$|F^{(k+1)}(z)|<\frac{1}{8}$，于是结合(3.26)式可知，在圆$|z|<\frac{1}{16}$内，恒有$|F(z)|<k+2$.

(2.2) 在圆$|z|<\frac{1}{16}$内存在一点z_3使$|F^{(k+1)}(z_3)|\geqslant\frac{1}{8}$.

于是在圆$|z|<\frac{1}{16}$内存在一点z_4，使$|F^{(k+1)}(z_4)|=\frac{1}{8}$，且当$z\in\overline{z_2z_4}$时，$|F^{(k+1)}(z)|\leqslant\frac{1}{8}$. 因而当$z\in\overline{z_2z_4}$时，

$$|F^{(k)}(z)|\leqslant|F^{(k)}(z_2)|+\left|\int_{\overline{zz_2}} f^{(k+1)}(\zeta)\,d\zeta\right|$$

$$<\frac{1}{8}+\frac{1}{64}<\frac{1}{7}.$$

由此，特别地有$|F^{(k)}(z_4)|<\frac{1}{7}$，且通过依次积分，可得$|F(z_4)|<k+1$.

这时再区分两种情形.

(2.2.1) $|F^{(k+2)}(z_4)|\geqslant\frac{1}{2}$.

应用定理3.12于圆$|z-z_4|<\frac{3}{4}$，当$0<r<\frac{3}{4}$时，有

$$T(r,\ z_4,\ F)<\left(2+\frac{2}{k}\right)m\left(r,z_4,\frac{F^{(k+1)}}{F^{(k)}-1}\right)$$

$$+\left(2+\frac{1}{k}\right)\left\{m\left(r,\ z_4,\ \frac{F^{(k+1)}}{F}\right)\right.$$

$$\left.+m\left(r,\ z_4,\ \frac{F^{(k)}}{F}\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{k}m\left(r,\ z_4,\ \frac{F^{(k+2)}}{F^{(k+1)}}\right)+4$$

$$+\left(2+\frac{1}{k}\right)\log\left|\frac{F(z_4)(F^{(k)}(z_4)-1)}{F^{(k+1)}(z_4)}\right|$$

$$+\frac{1}{k}\log\left|\frac{F^{(k+1)}(z_4)(F^{(k)}(z_4)-1)}{(k+1)F^{(k+2)}(z_4)(F^{(k)}(z_4)-1)-(k+2)F^{(k+1)}(z_4)^2}\right|$$

为了估计上式右端，我们应用定理1.13′于$m\left(r,z_4,\frac{F^{(k+1)}}{F}\right)$及$m\left(r,\ z_4,\ \frac{F^{(k)}}{F}\right)$，其中取$0<r<\rho<\frac{3}{4}$. 又应用定理1.13于$m\left(r,\ z_4,\ \frac{F^{(k+1)}}{F^{(k)}-1}\right)$及$m\left(r,\ z_4,\ \frac{F^{(k+2)}}{F^{(k+1)}}\right)$，其中考虑$0<r<\rho'$，$\rho'=\frac{1}{2}(r+\rho)$，这时，出现了项$\log^+T(\rho',z_4,\ F^{(k)})$与$\log^+T(\rho',\ z_4,\ F^{(k+1)})$，而

$$T(\rho',\ z_4,\ F^{(k)})\leqslant(k+1)T(\rho',\ z_4,\ F)+m\left(\rho',\ z_4,\ \frac{F^{(k)}}{F}\right),$$

$$T(\rho',\ z_4,\ F^{(k+1)})\leqslant(k+2)\ T(\rho',\ z_4,\ F)+m\left(\rho',\ z_4,\ \frac{F^{(k+1)}}{F}\right).$$

再应用引理1.13′于$m\left(\rho',\ z_4,\ \frac{F^{(k)}}{F}\right)$及$m\left(\rho',\ z_4,\ \frac{F^{(k+1)}}{F}\right)$，其中$0<\rho'<\rho$，这样就有

$$T(r,\ z_4,\ F)<K\left\{1+\log^+\frac{1}{r}+\log^+\frac{1}{\rho-r}+\log^+\rho\right.$$

$$\left.+\log^+T(\rho,z_4,\ F)+\log^+\log^+\frac{1}{|F(z_4)|}\right.$$

$$+\log^+\log^+\frac{1}{|F^{(k)}(z_4)-1|}$$

$$+\log^+\log^+\frac{1}{|F^{(k+1)}(z_4)|}\Bigg\}$$

$$+\left(2+\frac{1}{k}\right)\log\left|\frac{F(z_4)(F^{(k)}(z_4)-1)}{F^{(k+1)}(z_4)}\right|$$

$$+\frac{1}{k}\log\left|\frac{F^{(k+1)}(z_4)(F^{(k)}(z_4)-1)}{(k+1)F^{(k+2)}(z_4)(F^{(k)}(z_4)-1)-(k+2)F^{(k+1)}(z_4)^2}\right|$$

于 $0<r<\rho<\frac{3}{4}$ 成立.

在上式两端同加 $\log\frac{1}{|F(z_4)|}$，应用 Jensen 公式与引理2.3，并计及

$$\frac{1}{2}<|F^{(k)}(z_4)-1|<1,\quad |F(z_4)|<k+1,$$

$$|F^{(k+1)}(z_4)|=\frac{1}{8},$$

$$|(k+1)F^{(k+2)}(z_4)(F^{(k)}(z_4)-1)-(k+2)F^{(k+1)}(z_4)^2|$$

$$>\frac{k+1}{4}-\frac{k+2}{64}\geqslant\frac{28}{64},$$

就有

$$T\left(r,\ z_4,\ \frac{1}{F}\right)<K\left\{1+\log^+\frac{1}{r}+\log^+\frac{1}{\rho-r}\right.$$

$$\left.+\log^+T\left(\rho,\ z_4,\ \frac{1}{F}\right)\right\}$$

于 $0<r<\rho<\frac{3}{4}$ 成立. 再应用引理2.5，有

$$T\left(\frac{1}{2},\ z_4,\ \frac{1}{F}\right)<K.$$

由此得

$$\log^+ M\left(\frac{1}{4},\ z_4,\ \frac{1}{F}\right)<K.$$

因 $\left(|z|\leqslant\frac{1}{16}\right)\subset\left(|z-z_4|\leqslant\frac{1}{4}\right)$，故

$$\log^+ M\left(\frac{1}{16},\ \frac{1}{F}\right)<K.$$

(2.2.2)　$|F^{(k+2)}(z_4)|<\frac{1}{2}$. 我们又区分两种情形:

i)　在圆 $|z|<\frac{1}{16}$ 内，恒有 $|F^{(k+2)}(z)|<\frac{1}{2}$.　这时，在圆 $|z|<\frac{1}{16}$ 内，恒有 $|F(z)|<k+3$.

ii)　在圆 $|z|<\frac{1}{16}$ 内存在一点 z_5，使 $|F^{(k+2)}(z_5)|=\frac{1}{2}$，且当 $z\in\overline{z_4z_5}$ 时，$|F^{(k+2)}(z)|\leqslant\frac{1}{2}$. 因此

$$|F^{(k+1)}(z_5)|\leqslant|F^{(k+1)}(z_4)|+\left|\int_{\overline{z_4z_5}}F^{(k+2)}(z)dz\right|$$

$$<\frac{1}{8}+\frac{1}{16}<\frac{1}{4},$$

$$|F^{(k+1)}(z_5)|\geqslant|F^{(k+1)}(z_4)|-\left|\int_{\overline{z_4z_5}}F^{(k+2)}(z)dz\right|$$

$$>\frac{1}{8}-\frac{1}{16}=\frac{1}{16},$$

并且还有

$$|F^{(k)}(z_5)|\leqslant|F^{(k)}(z_4)|+\left|\int_{\overline{z_4z_5}}F^{(k+1)}(z)dz\right|$$

$$<\frac{1}{7}+\frac{1}{32}<\frac{1}{4},$$

$$|F(z_5)|<k+2.$$

再仿照上面情形（2.2.1）的讨论，应用定理3.12，可得

$$\log^+M\left(\frac{1}{16},\ \frac{1}{F}\right)<K.$$

综合以上各种情形可知，在圆$|z|<\frac{1}{64}$内或者恒有$|F(z)|<K$，

或者恒有$\left|\frac{1}{F(z)}\right|<K$，因而相应的$f(z)$在圆$|z-z_0|<\frac{r}{64}$内也具有此性质．这就证明了定理3.13．

在上述定则建立以后，有两个问题自然会提出：一是若把该定则中的条件$f^{(k)}\neq 1$改为$f^{(k)}\neq\varphi(z)$，其中$\varphi(z)$全纯且不恒为零，那么函数族$\{f(z)\}$是否仍为正规？二是若把该定则中的条件$f^{(k)}\neq 1$改为f的微分多项式$f^{(k)}+a_1f^{(k-1)}+\cdots+a_kf\neq 1$，那么函数族$\{f(z)\}$是否仍为正规？这两个问题不久前分别为杨乐[2]与朱经浩[1]所解决．下面我们综合这两方面的问题而建立如下正规定则：

定理3.14 设$\{f(z)\}$为区域D内一亚纯函数族，k为一正整，$a_1(z)$，$a_2(z)$，…，$a_k(z)$及$\varphi(z)$为D内全纯函数且$\varphi(z)\not\equiv 0$．若族$\{f(z)\}$中每个函数$f(z)$在D内满足：$f(z)\neq 0$及

$$f^{(k)}(z)+a_1(z)f^{(k-1)}(z)+\cdots+a_k(z)f(z)\neq\varphi(z),$$

则族 $\{f(z)\}$ 在D内正规.

为了证明此定理，我们先证三个引理.

引理3.1 设 $f(z)$ 在圆$|z|<R$内亚纯，$f(0)\neq 0$，∞. 又设 $b_2(z)$，$b_3(z)$，…，$b_k(z)$及$\varphi(z)$在$|z|<R$内全纯且 $\varphi(z)\neq 0$. 置

$$h(z)=\frac{1}{\varphi(z)}\left\{f^{(k)}(z)+b_2(z)f^{(k-2)}(z)+\cdots\right.$$

$$\left.+b_k(z)f(z)\right\}.$$

若存在正数$M(>1)$，使当$|z|<R$时，

$$|\varphi(z)|\leqslant M,\quad\left|\frac{1}{\varphi(z)}\right|\leqslant M,\quad\left|\left(\frac{1}{\varphi(z)}\right)'\right|\leqslant M,$$

$$|b_i(z)|\leqslant M,\quad|b_i'(z)|\leqslant M\qquad(i=2,\ 3,\ \cdots,\ k),$$

且 $h'(0)\neq 0$，$h(0)\neq 1$ 及

$$(k+1)(h(0)-1)h''(0)-(k+2)(h'(0))^2-\frac{2\varphi'(0)}{\varphi(0)}$$

$$\times(h(0)-1)h'(0)\neq 0,$$

则当 $0<r<R$时，有

$$T\left(r,\ \frac{1}{f}\right)<K\left\{N\left(r,\ \frac{1}{f}\right)+\overline{N}\right)r,\ \frac{1}{h-1}\right)$$

$$+1+\log\frac{R}{R-r}+\log^+R$$

$$+\log^+\frac{1}{R}+\log^+|f(0)|+\log^+|h(0)-1|$$

$$+\log^+\frac{1}{|h'(0)|}$$

$$+\log^+\frac{1}{\left|(k+1)(h(0)-1)h''(0)-(k+2)(h'(0))^2-\frac{2\varphi'(0)}{\varphi(0)}(h(0)-1)h'(0)\right|},$$

(3.27)

其中 K 为仅依赖于 k 与 M 的常数.

证明 由恒等式

$$\frac{1}{f}=\frac{h}{f}-\frac{h-1}{h'}\cdot\frac{h'}{f},$$

并应用 Jensen 公式与引理1.2，得

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)\leqslant m\left(r,\frac{h}{f}\right)+m\left(r,\frac{h'}{f}\right)+m\left(r,\frac{h'}{h-1}\right)$$

$$+\log 2+\overline{N}(r,f)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{h-1}\right)$$

$$-N_0\left(r,\frac{1}{h'}\right)+\log\left|\frac{h(0)-1}{h'(0)}\right|,$$

其中$N_0\left(r,\frac{1}{h'}\right)$表示$|z|\leqslant r$上$h'(z)$的零点但不是$h(z)-1$的零点的密指量. 故

$$T(r,f)=m\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\log|f(0)|$$

$$\leqslant m\left(r,\frac{h}{f}\right)+m\left(r,\frac{h'}{f}\right)+m\left(r,\frac{h'}{h-1}\right)$$

$$+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}(r,f)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{h-1}\right)$$

$$-N_0\left(r,\ \frac{1}{h'}\right)+\log\left|\frac{h(0)-1}{h'(0)}\right|$$

$$+\log|f(0)|+\log 2. \tag{3.28}$$

由上式得

$$\overline{N}_{(2}(r,\ f)\leqslant m\left(r,\ \frac{h}{f}\right)+m\left(r,\ \frac{h'}{f}\right)+m\left(r,\frac{h'}{h-1}\right)$$

$$+N\left(r,\ \frac{1}{f}\right)+\overline{N}\ (r,\ f)\ +\overline{N}\left(r,\frac{1}{h-1}\right)$$

$$-N_0\left(r,\ \frac{1}{h'}\right)+\log\left|\frac{h(0)-1}{h'(0)}\right|$$

$$+\log|f(0)|+\log 2. \tag{3.29}$$

置

$$g(z)=\frac{\varphi^2(h-1)^{k+2}}{(h')^{k+1}}. \tag{3.30}$$

我们指出，当 z_0 为 $f(z)$ 的单极点时，

$$g(z_0)\neq 0,\ \infty;\ g'(z_0)=0. \tag{3.31}$$

事实上，在 z_0 的邻域内，有

$$f(z)=\frac{d}{z-z_0}+O(1)\qquad (d\neq 0),$$

$$f^{(k)}(z)+b_2(z)f^{(k-2)}(z)+\cdots+b_k(z)f(z)$$

$$=\frac{(-1)^k k!\,d}{(z-z_0)^{k+1}}\left\{1+O\left((z-z_0)^2\right)\right\}.$$

而 $\varphi(z)$ 在 $z=z_0$ 的邻域内，有

$$\varphi(z)=a\left\{1+b(z-z_0)+O\left((z-z_0)^2\right)\right\}\qquad (a\neq 0),$$

$$\frac{1}{\varphi(z)}=\frac{1}{a}\left\{1-b(z-z_0)+O\left((z-z_0)^2\right)\right\}.$$

故

$$h(z)=\frac{(-1)^k k!\,d}{a(z-z_0)^{k+1}}\left\{1-b(z-z_0)+O\Big((z-z_0)^2\Big)\right\},$$

$$h'(z)=\frac{(-1)^{k+1}(k+1)!\,d}{a(z-z_0)^{k+2}}\left\{1\right.$$

$$\left.-\frac{k}{k+1}b(z-z_0)+O\Big((z-z_0)^2\Big)\right\}.$$

于是

$$g(z)=\frac{ad(-1)^{k(k+2)}(k!)^{k+2}}{(-1)^{(k+1)^2}\Big[(k+1)!\Big]^{k+1}}$$

$$\times\frac{\{1+2b(z-z_0)+O((z-z_0)^2)\}\cdot\{1-(k+2)b(z-z_0)+O((z-z_0)^2)\}}{1-kb(z-z_0)+O((z-z_0)^2)}$$

由于上式右端第二个因子为 $\dfrac{1-kb(z-z_0)+O\Big((z-z_0)^2\Big)}{1-kb(z-z_0)+O\Big((z-z_0)^2\Big)}$，所以 (3.31) 式成立. 由 (3.31) 式可知

$$N_{1)}(r,\ f)\leqslant N_0\left(r,\ \frac{1}{g'}\right),\tag{3.32}$$

其中 $N_0\left(r,\ \dfrac{1}{g'}\right)$ 表示 $|z|\leqslant r$ 上 $g'(z)$ 的零点但不是 $g(z)$ 的零点的密指量.

又根据 Jensen 公式及引理1.2,

$$m\left(r,\ \frac{g'}{g}\right)-m\left(r,\ \frac{g}{g'}\right)+\log\left|\frac{g(0)}{g'(0)}\right|$$

$$=N\left(r,\ \frac{g}{g'}\right)-N\left(r,\ \frac{g'}{g}\right)$$

$$=N(r,\ g)+N\left(r,\ \frac{1}{g'}\right)-N(r,\ g')-N\left(r,\ \frac{1}{g}\right)$$

$$=N_0\left(r,\ \frac{1}{g'}\right)-\overline{N}\left(r,\ \frac{1}{g}\right)-\overline{N}(r,\ g). \qquad (3.33)$$

由（3.32）及（3.33）式，得

$$N_{1)}(r,\ f)\leqslant\overline{N}(r,\ g)+\overline{\overline{N}}\left(r,\ \frac{1}{g}\right)$$

$$+m\left(r,\ \frac{g'}{g}\right)+\log\left|\frac{g(0)}{g'(0)}\right|.$$

而由（3.29）与（3.30）式可知

$$\overline{N}(r,\ g)+\overline{\overline{N}}\left(r,\ \frac{1}{g}\right)$$

$$\leqslant\overline{\overline{N}}_{(2}(r,\ f)+\overline{\overline{N}}\left(r,\ \frac{1}{h-1}\right)+N_0\left(r,\ \frac{1}{h'}\right).$$

于是

$$N_{1)}(r,\ f)\leqslant\overline{\overline{N}}_{(2}(r,\ f)+\overline{\overline{N}}\left(r,\ \frac{1}{h-1}\right)+N_0\left(r,\ \frac{1}{h'}\right)$$

$$+m\left(r,\ \frac{g'}{g}\right)+\log\left|\frac{g(0)}{g'(0)}\right|. \qquad (3.34)$$

综合（3.27）、（3.29）及（3.34）式，并应用 Jensen 公式，得

$$T\left(r,\ \frac{1}{f}\right)=T(r,\ f)-\log|f(0)|.$$

$$\leqslant 3N\left(r,\ \frac{1}{f}\right)$$

$$+4\overline{N}\left(r,\ \frac{1}{h-1}\right)+S(r,\ f), \tag{3.35}$$

其中

$$S(r,\ f)=3m\left(r,\ \frac{h}{f}\right)+3m\left(r,\ \frac{h'}{f}\right)$$

$$+\ 3m\left(r,\ \frac{h'}{h-1}\right)+m\left(r,\ \frac{g'}{g}\right)$$

$$+\log\left|\frac{g(0)}{g'(0)}\right|+2\log\|f(0)\|$$

$$+3\log\left|\frac{h(0)-1}{h'(0)}\right|+3\log 2.$$

以下估计上式中的 $S(r,\ f)$.

$$m\left(r,\ \frac{h}{f}\right)+m\left(r,\ \frac{h'}{f}\right)\leqslant 2\sum_{j=1}^{k+1}m\left(r,\ \frac{f^{(j)}}{f}\right)+6k\log M$$

取 $0<r<\rho<R$, 由定理1.13′，有

$$m\left(r,\ \frac{h}{f}\right)+m\left(r,\ \frac{h'}{f}\right)$$

$$<K\left\{1+\log^+\rho+\log^+\frac{1}{r}+\log^+\frac{1}{\rho-r}\right.$$

$$\left.+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+\log^+T(\rho,f)\right\}. \tag{3.36}$$

另外，

$$m\left(r, \frac{g'}{g}\right) \leqslant K\left\{m\left(r, \frac{\varphi'}{\varphi}\right) + m\left(r, \frac{h'}{h-1}\right)\right.$$

$$\left. + m\left(r, \frac{h''}{h'}\right)\right\}$$

$$\leqslant K\left\{2\log M + m\left(r, \frac{h'}{h-1}\right)\right.$$

$$\left. + m\left(r, \frac{h''}{h'}\right)\right\}. \tag{3.37}$$

应用定理1.13，并令$\rho' = \dfrac{\rho + r}{2}$，有

$$m\left(r, \frac{h'}{h-1}\right) + m\left(r, \frac{h''}{h'}\right)$$

$$< K\left\{1 + \log^+\rho' + \log^+\frac{1}{r} + \log^+\frac{1}{\rho' - r}\right.$$

$$+ \log^+\log^+\frac{1}{|h(0) - 1|} + \log^+\log^+\frac{1}{|h'(0)|}$$

$$\left. + \log^+T(\rho', h) + \log^+T(\rho', h') + \log^+T(\rho', h')\right\}. \tag{3.38}$$

而

$$T(\rho', h) \leqslant m\left(\rho', \frac{h}{f}\right) + m(\rho', f) + (k+1)N(\rho', f)$$

$$\leqslant m\left(\rho', \frac{h}{f}\right)+(k+1)T(\rho', f),$$

$$T(\rho', h')\leqslant m\left(\rho', \frac{h'}{f}\right)+m(\rho', f)+(k+2)N(\rho', f)$$

$$\leqslant m\left(\rho', \frac{h'}{f}\right)+(k+2)T(\rho', f).$$

由（3.37）与（3.38）式，并应用定理1.13′于$m\left(\rho', \frac{h}{f}\right)$和$m\left(\rho', \frac{h'}{f}\right)$，就得

$$3m\left(r, \frac{h'}{h-1}\right)+m\left(r, \frac{g'}{g}\right)$$

$$<K\left\{1+\log^+\rho+\log^+\frac{1}{r}+\log^+\frac{1}{\rho-r}\right.$$

$$+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+\log^+\log^+\frac{1}{|h(0)-1|}$$

$$\left.+\log^+\log^+\frac{1}{|h'(0)|}+\log^+T(\rho, f)\right\}. \qquad (3.39)$$

由（3.35）、（3.36）与（3.39），并计及

$$\log^+T(\rho, f)\leqslant\log^+T\left(\rho, \frac{1}{f}\right)+\log^+|f(0)|+\log 2,$$

再应用引理2.3及引理2.5就知（3.27）式成立.

引理3.2 设$f(z)$及$a_j(z)$($j=1, 2, \cdots, k$)均于含线段$\overline{z_1z_2}$

的某区域内全纯. 若在线段 $\overline{z_1z_2}$ 上，恒有

$$|a_j(z)|\leqslant H \quad (j=1,\ \cdots,\ k,\ H>1),$$

$$|f^{(k)}(z)+a_1(z)f^{(k-1)}(z)+\cdots+a_k(z)f(z)|\leqslant A, \quad (3.40)$$

则当 $|z_1-z_2|<\frac{1}{2kH}$ 时，有

$$|f^{(i)}(z_2)|<K\left(1+\sum_{j=0}^{k-1}|f^{(j)}(z_1)|\right) \quad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ k),$$

其中 K 仅依赖于 k, H 及 A.

证明 命

$$M_i=\max_{z\in\overline{z_1z_2}}|f^{(i)}(z)| \quad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ k).$$

由条件 (3.40)，当 $z\in\overline{z_1z_2}$ 时，

$$|f^{(k)}(z)|\leqslant A+H\sum_{j=0}^{k-1}|f^{(j)}(z)|.$$

故

$$M_k\leqslant A+H\sum_{j=0}^{k-1}M_j.$$

另外，通过积分

$$f^{(k-1)}(z)=f^{(k-1)}(z_1)+\int_{\overline{z_1z}}f^{(k)}(\zeta)d\zeta \quad (z\in\overline{z_1z_2}),$$

有

$$M_{k-1}\leqslant|z_1-z_2|M_k+|f^{(k-1)}(z_1)|$$

$$\leqslant A+H\sum_{j=0}^{k-2}M_j+H|z_1-z_2|M_{k-1}+|f^{(k-1)}(z_1)|.$$

因而

$$M_{k-1}\left(1-\frac{1}{2k}\right)\leqslant A+H\sum_{j=0}^{k-2}M_j+|f^{(k-1)}(z_1)|.$$

也就有

$$M_{k-1}\leqslant 2A+2H\sum_{j=0}^{k-2}M_j+2|f^{(k-1)}(z_1)|.$$

如此继续进行积分，可导出

$$M_{k-i}\leqslant 2^iA+2^iH\sum_{j=0}^{k-i-1}M_j+2^i\sum_{j=k-i}^{k-1}|f^{(j)}(z_1)|$$

$$(i=0,\ 1,\ \cdots,\ k-1), \tag{3.41}$$

$$M_0\leqslant 2^kA+2^k\sum_{j=0}^{k-1}|f^{(j)}(z_1)|. \tag{3.42}$$

由（3.41）与（3.42）式，立即可得引理中的结论.

引理3.3 设 $f(z)$在 $|z|<1$ 内亚纯，$b_2(z)$，$b_3(z)$，…，$b_k(z)$及 $\varphi(z)$在 $|z|\leqslant 1$上全纯且$\varphi(z)\neq 0$．若在 $|z|<1$ 内$f(z)\neq 0$ 及

$$f^{(k)}(z)+b_2(z)f^{(k-2)}(z)+\cdots+b_k(z)f(z)\neq\varphi(z),$$

则在圆 $|z|<\eta$ 内或者恒有 $|f(z)|\leqslant K$，或者恒有 $\left|\frac{1}{f(z)}\right|\leqslant K$，其中 η（<1）与K均为与 f 无关的正常数.

证明 取正数 M（>1），使在圆 $|z|\leqslant 1$ 上，有

$$|b_i(z)|\leqslant M,\quad |b_i'(z)|\leqslant M\quad (i=2,\ 3,\ \cdots,\ k),$$

$$|\varphi(z)|\leqslant M,\quad \left|\frac{1}{\varphi(z)}\right|\leqslant M,\quad \left|\left(\frac{1}{\varphi(z)}\right)'\right|\leqslant M$$

并令$\delta=\frac{1}{kM^2}$. 我们区分两种情形.

（1）在圆 $|z|<\frac{\delta}{16}$内，恒有

$$|f(z)| + |f'(z)| + \cdots + |f^{(k)}(z)| + |h(z)| + |h'(z)| \geqslant \frac{1}{8M^2} \tag{3.43}$$

这时再区分两种情形.

(1.1)　在圆 $|z|<\frac{\delta}{64}$ 内或者恒有 $|f(z)|<1$，或者恒有 $|f(z)|>1$.

(1.2)　在圆 $|z|<\frac{\delta}{64}$ 内存在一点 z_1，使 $|f(z_1)|=1$. 于是由（3.43）式，当 $0<r<\frac{\delta}{16}$时，

$$m\left(r,\ z_1,\ \frac{1}{f}\right)<K\left\{\sum_{j=1}^{k+1} m\left(r,\ z_1,\ \frac{f^{(j)}}{f}\right)+1\right\}.$$

根据定理1.13′及引理2.5，有

$$T\left(\frac{3\delta}{64},\ z_1,\ \frac{1}{f}\right)<K.$$

于是

$$\log^+ M\left(\frac{\delta}{32},\ z_1,\ \frac{1}{f}\right)<K.$$

又因$\left(|z|\leqslant\frac{\delta}{64}\right)\subset\left(|z-z_1|\leqslant\frac{\delta}{32}\right)$，故

$$\log^+ M\left(\frac{\delta}{64},\ \frac{1}{f}\right)<K.$$

（2）　在圆 $|z|<\frac{\delta}{16}$内存在一点z_2，使

$$|f(z_2)| + |f'(z_2)| + \cdots + |f^{(k)}(z_2)| + |h(z_2)| + |h'(z_2)|$$

$$< \frac{1}{8M^2}. \tag{3.44}$$

我们又区分两种情形.

(2.1) 在圆 $|z| < \frac{\delta}{16}$ 内恒有 $|h'(z)| < \frac{1}{8M^2}$. 由 (3.44) 式可知, 在 $|z| < \frac{\delta}{16}$ 内恒有 $|h(z)| < \frac{1}{4M^2}$. 于是, 当 $|z| < \frac{\delta}{16}$ 时,

$$|f^{(k)}(z) + b_2(z)f^{(k-2)}(z) + \cdots + b_k(z)f(z)| < \frac{1}{4M}.$$

再根据引理3.2及 (3.44) 式, 就有

$$|f(z)| < K \quad \left(|z| < \frac{\delta}{16}\right).$$

(2.2) 在圆 $|z| < \frac{\delta}{16}$ 内存在一点 z_3, 使

$$|h'(z_3)| = \frac{1}{8M^2}, \quad |h'(z)| \leqslant \frac{1}{8M^2} \quad (z \in \overline{z_2 z_3}). \tag{3.45}$$

由 (3.44) 与 (3.45) 式, 当 $z \in \overline{z_2 z_3}$ 时,

$$|h(z)| \leqslant |h(z_2)| + \left|\int_{\overline{z_2 z_3}} h'(\zeta)d\zeta\right| < \frac{1}{7M^2}. \tag{3.46}$$

再由 (3.44)、(3.46) 式及引理3.2, 可得

$$|f^{(j)}(z_3)| < K \quad (j = 0, 1, \cdots, k). \tag{3.47}$$

这时又区分两种情形.

(2.2.1) $|h''(z_3)| \geqslant \frac{1}{2}$.

应用引理3.1于圆 $|z-z_3|\leqslant\frac{3\delta}{4}$，当$0<r<<\frac{3\delta}{4}$时，

$$T\left(r,\ z_3,\ \frac{1}{f}\right)<K\left\{1+\log\frac{\frac{3\delta}{4}}{\frac{3\delta}{4}-r}+\log^+\frac{4}{3\delta}\right.$$

$$+\log^+|f(z_3)|+\log^+|h(z_3)-1|+\log^+\frac{1}{|h'(z_3)|}$$

$$\left.+\log^+\frac{1}{\left|(k+1)(h(z_3)-1)h''(z_3)-(k+2)(h'(z_3))^2-\frac{2\varphi'(z_3)}{\varphi(z_3)}(h(z_3)-1)h'(z_3)\right|}\right\}$$

(3.48)

另外，由（3.45）、（3.47）及（3.46）式，有

$$|f(z_3)|<K,\quad |h''(z_3)|\geqslant\frac{1}{2},\quad |h'(z_3)|=\frac{1}{8M^2},$$

$$|h(z_3)|<\frac{1}{7M^2},$$

$$\left|(k+1)h''(z_3)\Big(h(z_3)-1\Big)-(k+2)\Big(h'(z_3)\Big)^2\right.$$

$$\left.-\frac{2\varphi'(z_3)}{\varphi(z_3)}\Big(h(z_3)-1\Big)h'(z_3)\right|$$

$$>(k+1)\frac{1}{2}\times\frac{6}{7}-\frac{1}{64}(k+2)-2M^2\cdot\frac{8}{7}$$

$$\cdot\frac{1}{8M^2}>\frac{3}{7}.$$

故若在（3.48）式中取$r=\frac{\delta}{2}$，就有

$$T\left(\frac{\delta}{2},\ z_3,\ \frac{1}{f}\right)<K.$$

再计及$\left(|z|\leqslant\frac{\delta}{16}\right)\subset\left(|z-z_3|\leqslant\frac{\delta}{4}\right)$，得

$$\log^+ M\left(\frac{\delta}{16},\ \frac{1}{f}\right)<K.$$

（2.2.2）　$|h''(z_3)|<\frac{1}{2}$.

我们再区分两种情形.

（2.2.2.1）　在圆$|z|<\frac{\delta}{16}$内恒有$|h''(z)|<\frac{1}{2}$. 结合（3.44）式就知，当$|z|<\frac{\delta}{16}$时，

$$|h'(z)|\leqslant|h'(z_2)|+\left|\int_{\overline{z_2 z}}h''(\zeta)d\zeta\right|<\frac{1}{4M^2}.$$

从而

$$|h(z)|\leqslant|h(z_2)|+\left|\int_{\overline{z_2 z}}h'(\zeta)d\zeta\right|<\frac{1}{4M^2}.$$

再结合（3.44）式及引理3.2，就有

$$|f(z)|<K\quad\left(|z|<\frac{\delta}{16}\right).$$

（2.2.2.2）　在圆$|z|<\frac{\delta}{16}$内存在一点z_4，使

$$|h''(z_4)|=\frac{1}{2},\quad |h''(z)|\leqslant\frac{1}{2}\qquad(z\in\overline{z_3 z_4}).$$

于是当$z\in\overline{z_3 z_4}$时，有

$$|h'(z)| \leqslant |h'(z_3)| + \left|\int_{\overline{z_3 z}} h''(\zeta)d\zeta\right| < \frac{1}{8M^2} + \frac{1}{16M^2}$$

$$= \frac{3}{16M^2}, \tag{3.49}$$

$$|h'(z)| \geqslant |h'(z_3)| - \left|\int_{\overline{z_3 z}} h''(\zeta)d\zeta\right| > \frac{1}{8M^2} - \frac{1}{16M^2}$$

$$= \frac{1}{16M^2}. \tag{3.50}$$

由（3.49）式，再通过积分及（3.46）式，得

$$|h(z)| \leqslant |h(z_3)| + \left|\int_{\overline{z_3 z}} h'(\zeta)d\zeta\right| < \frac{3}{16M^2} \quad (z \in \overline{z_3 z_4}). \tag{3.51}$$

由（3.51）及（3.47）式，并应用引理3.2，就有

$$|f(z_4)| < K.$$

最后完全仿照情形 1）的讨论，应用引理3.1于圆 $|z-z_4| \leqslant \frac{3\delta}{4}$，就有

$$\log^+ M\left(\frac{\delta}{16}, \frac{1}{f}\right) < K.$$

至此引理证毕.

现在我们来证定理3.14. 证明分为三步.

1. $a_1(z) \equiv 0$，$\varphi(z) \neq 0$ $(z \in D)$. 任取定点 $z_0 \in D$，我们只需证族 $\{f(z)\}$ 在点 z_0 正规. 取正数 ρ，使 $(|z-z_0| \leqslant \rho) \subset D$. 对任一 $f \in \{f(z)\}$，置 $F(z) = f(z_0 + \rho z)$，于是族 $\{F(z)\}$ 为圆 $|z| \leqslant 1$ 上的全纯函数族，且满足 $F(z) \neq 0$ 及

$$F^{(k)}(z)+\rho^2 a_2^*(z)F^{(k-2)}(z)+\cdots+\rho^k a_k^*(z)F(z)$$

$$\neq \rho^k\varphi^*(z),$$

其中，$a_j^*(z)\equiv a_j(z_0+\rho z)$ $(j=2,3,\cdots,k)$，$\varphi^*(z)\equiv\varphi(z_0+\rho z)$.

应用引理3.3于族$\{F(z)\}$可知，族$\{F(z)\}$在点$z=0$正规，即$\{f(z)\}$在点z_0正规.

2. $\varphi(z)\neq 0$. 任取定点$z_0\in D$. 作圆域G: $|z-z_0|<\rho$，使$G\subset D$. 命

$$\alpha(z)=\frac{1}{k}\int_{z_0}^{z}a_1(\zeta)d\zeta \quad (z\in G),$$

$$g(z)=e^{\alpha(z)}f(z).$$

于是

$$f^{(j)}(z)=g^{(j)}(z)e^{-\alpha(z)}+C_j^1 g^{(j-1)}(z)\left(e^{-\alpha(z)}\right)'+\cdots$$

$$+g(z)\left(e^{-\alpha(z)}\right)^{(j)} \quad (j=1,\cdots,k).$$

因而

$$f^{(k)}(z)+a_1(z)f^{(k-1)}(z)+a_2(z)f^{(k-2)}(z)$$

$$+\cdots+a_k(z)f(z)$$

$$=e^{-\alpha(z)}\Big\{g^{(k)}(z)+b_2(z)g^{(k-2)}(z)$$

$$+\cdots+b_k(z)g(z)\Big\},$$

其中$b_j(z)$ $(j=2,3,\cdots,k)$ 为G内仅依赖于$a_i(z)$ $(i=1,\cdots,k)$ 的全纯函数.

再应用证明步骤1的结果知，族$\{g(z)\}$在G内正规，因此族$\{f(z)\}$也在G内正规．因z_0是D内任取的一点，故族$\{f(z)\}$在D内正规．

3．　一般情形．任取一点$z_0\in D$．由证明步骤2知，若$\varphi(z_0)\neq 0$，则族$\{f(z)\}$在$z=z_0$正规．现设$\varphi(z_0)=0$．取圆域$|z-z_0|<\rho$，使$(|z-z_0|<\rho)\subset D$，且当$0<|z-z_0|<\rho$时，$\varphi(z)\neq 0$．再应用证明步骤2知，族$\{f(z)\}$在圆环$R:0<|z-z_0|<\rho$内正规．根据定理3.4，族$\left\{\frac{1}{f}\right\}$也在$R$内正规．因$\left\{\frac{1}{f}\right\}$为全纯函数族，故根据定理3.5，族$\left\{\frac{1}{f}\right\}$按定义2.4仍在$R$内正规．于是对任取的函数序列$f_n(z)\in\{f(z)\}$，可选取一子序列，不妨仍设为$f_n(z)$，使$\frac{1}{f_n(z)}$在$R$上内闭一致收敛于全纯函数或内闭一致趋于无穷．下面区分两种情形．

（1）　$\frac{1}{f_n(z)}$在R上内闭一致收敛于全纯函数$g(z)$．又因$\frac{1}{f_n(z)}$在圆域$|z-z_0|<\rho$内全纯，故函数序列$\frac{1}{f_n(z)}$在圆域$|z-z_0|<\rho$上内闭一致收敛于全纯函数．

（2）　$\frac{1}{f_n(z)}$在R上内闭一致趋于无穷．于是$\frac{1}{f_n(z)}$在

圆环$\frac{\rho}{4}<|z-z_0|<\frac{\rho}{2}$内一致趋于无穷，从而$f_n(z)$在圆环$\frac{\rho}{4}<|z-z_0|<\frac{\rho}{2}$内一致趋于零. 故$h_n(z)$与$h_n'(z)$在圆周$|z-z_0|=\frac{\rho}{3}$上一致趋于零，其中

$$h_n(z)=\frac{1}{\varphi(z)}\left\{f_n^{(k)}(z)+a_1(z)f_n^{(k-1)}(z)\right.$$

$$\left.+\cdots+a_k(z)f_n(z)\right\}\qquad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

另外，由Rouché定理，

$$\left|n\left(\frac{\rho}{3},\ z_0,\ \frac{1}{h_n-1}\right)-n\left(\frac{\rho}{3},\ z_0,\ h_n-1\right)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_0|=\frac{\rho}{3}}\frac{h_n'}{h_n-1}d\zeta\right|.$$

由于当$n\to\infty$时，上式右端趋于零，故当n适当大时，

$$n\left(\frac{\rho}{3},\ z_0,\ h_n\right)=n\left(\frac{\rho}{3},\ z_0,\ h_n-1\right)$$

$$=n\left(\frac{\rho}{3},z_0,\frac{1}{h_n-1}\right).$$

而根据定理条件，$n\left(\frac{\rho}{3},\ z_0,\ \frac{1}{h_n-1}\right)=0$，因此

$$n\left(\frac{\rho}{3},\ z_0,\ h_n\right)=0.$$

从而

$$n\left(\frac{\rho}{3},\ z_0,\ f_n\right)=0,$$

即 $f_n(z)$ 在 $|z-z_0|\leqslant\frac{\rho}{3}$ 上全纯．于是 $f_n(z)$ 在 $|z-z_0|\leqslant\frac{\rho}{3}$ 上一致趋于零．

综合情形（1）与（2）就知，族 $\{f(z)\}$ 在点 z_0 正规。至此定理证毕．

由上述定理，立即推得

系1　设 $\{f(z)\}$ 为区域 D 内一亚纯函数族，k 为一正整数，a_0，a_1，$\cdots a_k$ 为复常数，$a_k\neq 0$．若族 $\{f(z)\}$ 中每个函数 $f(z)$ 在 D 内满足 $f(z)\neq 0$ 及

$$a_0f(z)+a_1f'(z)+\cdots+a_kf^{(k)}(z)\neq 1,$$

则族 $\{f(z)\}$ 在 D 内正规．

系2　设 $\{f(z)\}$ 为区域 D 内一亚纯函数族，k 为一正整数，$\varphi(z)$ 在 D 内全纯且 $\varphi(z)\not\equiv 0$．若族 $\{f(z)\}$ 中每个函数 $f(z)$ 在 D 内满足 $f(z)\neq 0$ 及 $f^{(k)}(z)\neq\varphi(z)$，则族 $\{f(z)\}$ 在 D 内正规．

我们还可考虑更一般的微分多项式．

定理3.15　设 $\{f(z)\}$ 为区域 D 内一亚纯函数族．若对于族中每个函数 $f(z)$ 在区域 D 内满足 $f(z)\neq 0$ 及

$$\{f^{(k)}\}^q+H(f,\ f',\ \cdots,\ f^{(k-1)})\neq 1,$$

其中 $H(f,\ f',\ \cdots,\ f^{(k-1)})$ 为 q 次常系数齐次微分多项式，$q\geqslant 1$，则亚纯函数族 $\{f(z)\}$ 在 D 内正规．

我们先证两个引理.

引理3.4 设 $f(z)$ 于 $|z|\leqslant r$ 亚纯，$f(0)\neq 0,\infty$，$g(0)\neq 1$，$g'(0)\neq 0$，其中 $g(z)=\left\{f^{(k)}(z)\right\}^q+H\left(f, f', \cdots, f^{(k-1)}\right)$，$H$ 为 q 次常系数齐次微分多项式，$q\geqslant 2$，则

$$
\begin{aligned}
qT(r, f) \leqslant & K\left\{\sum_{j=1}^{k+1} m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right)+1\right\} \\
& +3m\left(r, \frac{g'}{g-1}\right) \\
& +m\left(r, \frac{G'}{G}\right)+\log\left|\frac{G(0)}{G'(0)}\right|+3q\log|f(0)| \\
& +3\log\left|\frac{g(0)}{g'(0)}\right|+3qN\left(r, \frac{1}{f}\right) \\
& +3N\left(r, \frac{1}{g-1}\right),
\end{aligned}
$$

其中

$$
G(z)=\frac{\left[g(z)-1\right]^{q(k+1)+1}}{\left[g'(z)\right]^{q(k+1)}} \tag{3.52}
$$

证明 从恒等式

$$
\frac{1}{f^q}=\frac{g}{f^q}-\frac{g-1}{g'}\frac{g'}{f^q}
$$

得

$$
\begin{aligned}
qm\left(r, \frac{1}{f}\right) \leqslant & K\left\{1+\sum_{j=1}^{k+1} m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right)\right\} \\
& +m\left(r, \frac{g-1}{g'}\right).
\end{aligned}
$$

$$= K\left\{1+\sum_{j=1}^{k+1} m\left(r,\ \frac{f^{(\ )}}{f}\right)\right\}+m\left(r,\ \frac{g'}{g-1}\right)$$

$$+N(r,\ g')+N\left(r,\ \frac{1}{g-1}\right)$$

$$-N(r,\ g-1)-N\left(r,\ \frac{1}{g'}\right)+\log\left|\frac{g(0)-1}{g'(0)}\right|.$$

故若令$N_0\left(r,\ \frac{1}{g'}\right)$表示$|z|\leqslant r$上$g'(z)$的零点但不是$g(z)-1$的零点的密指量，那么就有

$$qT(r,\ f)\leqslant K\left\{1+\sum_{j=1}^{k+1} m\left(r,\ \frac{f^{(\ )}}{f}\right)\right\}$$

$$+m\left(r,\ \frac{g'}{g-1}\right)+\overline{\overline{N}}\left(r,\ \frac{1}{g-1}\right)$$

$$+\overline{\overline{N}}(r,\ f)+qN\left(r,\ \frac{1}{f}\right)+q\log|f(0)|$$

$$+\log\left|\frac{g(0)-1}{g'(0)}\right|-N_0\left(r,\ \frac{1}{g'}\right). \qquad (3.53)$$

设z_0为$f(z)$的单级极点，$f(z)=\frac{a}{z-z_0}+O(1)$，$(a\neq 0)$.于是

$$f^{(k)}(z)=\frac{(-1)^k k!\,a}{(z-z_0)^{k+1}}+O(1),$$

$$H\left(f,\cdots,f^{(k-1)}\right)=O\left((z-z_0)^{-qk}\right)$$

$$\left\{f^{(k)}(z)\right\}^q=\frac{\left((-1)^k k!\,a\right)^q}{(z-z_0)^{q(k+1)}}$$

$$+O\left((z-z_0)^{-(q-1)(k+1)}\right).$$

再计及 $q\geqslant 2$ 及 $k+1\geqslant 2$，就有

$$g(z)=\frac{\left((-1)^k k!\,a\right)^q}{(z-z_0)^{q(k+1)}}\left\{1+O\left((z-z_0)^2\right)\right\},$$

$$g'(z)=\frac{\left((-1)^k k!\,a\right)^q\left(-q(k+1)\right)}{(z-z_0)^{q(k+1)+1}}$$

$$\times\left\{1+O\left((z-z_0)^2\right)\right\}^q,$$

故

$$G(z)=K\frac{1+O\left((z-z_0)^2\right)}{1+O\left((z-z_0)^2\right)}.$$

由此可知，$G(z_0)\neq 0$，∞，$G'(z_0)=0$．于是

$$N_{1)}(r,f)\leqslant N_0\left(r,\frac{1}{G'}\right),\tag{3.54}$$

其中 $N_{1)}(r,f)$ 表示 $f(z)$ 的单极点密指量，$N_0\left(r,\frac{1}{G'}\right)$ 表示 $|z|\leqslant r$ 上 $G'(z)$ 的零点而不是 $G(z)$ 的零点的密指量．我们再用 $\overline{N}_{(2}(r,f)$ 表示 $f(z)$ 的重级极点的精简密指量．由 Jensen 公式，

$$m\left(r,\frac{G'}{G}\right)-m\left(r,\frac{G}{G'}\right)+\log\left|\frac{G(0)}{G'(0)}\right|$$

$$=N\left(r,\frac{G}{G'}\right)-N\left(r,\frac{G'}{G}\right)$$

$$=N(r,G)+N\left(r,\frac{1}{G'}\right)$$

$$-N(r, G')-N\left(r, \frac{1}{G}\right)$$

$$=N_0\left(r, \frac{1}{G'}\right)-\overline{N}\left(r, \frac{1}{G}\right)-\overline{\overline{N}}(r, G).$$

(3.55)

从上面的讨论知，凡是 $f(z)$ 的单级极点 z_0 总有 $G(z_0)\neq 0$，∞. 再结合 G 的表达式（3.52），从而有

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{G}\right)+\overline{N}(r, G)\leqslant\overline{N}_{(2}(r, f)+\overline{N}\left(r, \frac{1}{g-1}\right)$$

$$+N_0\left(r, \frac{1}{g'}\right). \tag{3.56}$$

综合（3.54）、（3.55）及（3.56）式，就有

$$N_{1)}(r, f)\leqslant\overline{N}_{2)}(r, f)+\overline{N}\left(r, \frac{1}{g-1}\right)+N_0\left(r, \frac{1}{g'}\right)$$

$$+\log\left|\frac{G(0)}{G'(0)}\right|+m\left(r, \frac{G'}{G}\right).$$

(3.57)

由上式，就得

$$\overline{N}(r, f)=N_{1)}(r, f)+\overline{N}_{(2}(r, f)$$

$$\leqslant 2\overline{N}_{(2}(r, f)+\overline{N}\left(r, \frac{1}{g-1}\right)$$

$$+N_0\left(r, \frac{1}{g'}\right)+m\left(r, \frac{G'}{G}\right)$$

$$+\log\left|\frac{G(0)}{G'(0)}\right|. \tag{3.58}$$

另外，从（3.53）式，可得

$$\overline{N}_{(2}(r, f)\leqslant N(r, f)-\overline{N}(r, f)$$

$$\leqslant K\left\{1+\sum_{j=1}^{k+1} m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right)\right\}$$

$$+m\left(r, \frac{g'}{g-1}\right)+\bar{N}\left(r, \frac{1}{g-1}\right)$$

$$+qN\left(r, \frac{1}{f}\right)+q\log|f(0)|$$

$$+\log\left|\frac{g(0)-1}{g'(0)}\right|-N_0\left(r, \frac{1}{g'}\right). \tag{3.59}$$

综合（3.53）、（3.58）及（3.59）式，就证得引理3.4.

引理3.5 设$f(z)$于$|z|<1$亚纯，$f(z)\neq 0$，$\left\{f^{(k)}(z)\right\}^q H(f, f', \cdots, f^{(k-1)})\neq 1$，其中$H$为$q$次常系数齐次微分多项式，$q\geqslant 2$，则存在一正数$\delta$，它与$f$无关，使$f(z)$在圆$|z|<\frac{\delta}{64}$内或者恒有$|f(z)|<K$，或者恒有$\left|\frac{1}{f(z)}\right|<K$.

证明 任取定三正数δ，α_1及α_2满足

$$1-\frac{\delta}{8}A^{\frac{1}{q}}-\left(\frac{\delta}{8}\right)^2 A^{\frac{1}{q}}-\cdots-\left(\frac{\delta}{8}\right)^k A^{\frac{1}{q}}>0, \tag{3.60}$$

$$\left(\frac{\delta}{8}+1\right)\left(\alpha_1+\frac{\delta}{8}\alpha_2\right)<1,$$

$$\alpha_1-\frac{\delta}{8}\alpha_2>0. \tag{3.61}$$

$$q(k+1)\left(\alpha_1-\frac{\delta}{8}\alpha_2\right)^{q(k+1)-1}$$

$$\times \alpha_2 \left\{1-\left(\frac{\delta}{8}+1\right)\left(\alpha_1+\frac{\delta}{8}\alpha_2\right)\right\}^{q(k+1)+1}$$

$$-\left\{q(k+1)+1\right\}\left\{1+\left(\frac{\delta}{8}+1\right)\left(\alpha_1+\frac{\delta}{8}\alpha_2\right)\right\}^{q(k+1)}$$

$$\times\left(\alpha_1+\frac{\delta}{8}\alpha_2\right)^{q(k+1)+1}>0, \qquad (3.62)$$

其中 A 为多项式 H 的各项系数之模的最大值.

当我们取 $\alpha_1=\alpha_2^{\frac{1}{2}}$, $\delta=\alpha_2^{\frac{1}{2}}$, 并令 α_2 充分小时就知, 满足上述条件的正数 α_1, α_2 和 δ 是存在的.

以下我们区分两种情形.

(1) 在圆 $|z|<\frac{\delta}{16}$ 内, 恒有

$$\left|f(z)\right|^q+\left|f'(z)\right|^q+\cdots+\left|f^{(k)}(z)\right|^q+\left|g(z)\right|$$

$$+\left|g'(z)\right|\geqslant\alpha_1,$$

其中 $g(z)\equiv\left\{f^{(k)}(z)\right\}^q+H\left(f(z),\ f'(z),\cdots,f^{(k-1)}(z)\right)$.

此时又区分两种情形.

(1.1) 在圆 $|z|<\frac{\delta}{64}$ 内恒有 $\left|f(z)\right|<1$ 或恒有 $\left|f(z)\right|>1$.

(1.2) 在圆 $|z|<\frac{\delta}{64}$ 内存在一点 z_1, 使 $f(z_1)=1$. 于是在圆 $|z-z_1|<\frac{3\delta}{64}$ 内, 恒有

$$\left|\frac{1}{f}\right|^q\leqslant\frac{K}{\alpha_1}\left(\sum_{j=0}^{k}\left|\frac{f^{(\ )}}{f}\right|\right)^q.$$

故

$$m\left(r, z_1, \frac{1}{f}\right) \leqslant \sum_{j=1}^{k} m\left(r, z_1, \frac{f^{(j)}}{f}\right) + K.$$

由定理1.13′并注意到$f(z_1)=1$，就有

$$T\left(r, z_1, \frac{1}{f}\right) = m\left(r, z_1, \frac{1}{f}\right) \leqslant K\left\{1 + \log^+\rho\right.$$

$$\left. + \log^+\frac{1}{r} + \log^+\frac{1}{\rho - r} + \log^+ T\left(\rho, z_1, \frac{1}{f}\right)\right\}$$

于$0 < r < \rho < \frac{3\delta}{64}$成立. 再由引理2.5，得

$$T\left(\frac{5\delta}{128}, z_1, \frac{1}{f}\right) < K.$$

故

$$\log M\left(\frac{\delta}{32}, z_1, \frac{1}{f}\right) < K.$$

又因圆$\left(|z| \leqslant \frac{\delta}{64}\right) \subset \left(|z - z_1| \leqslant \frac{\delta}{32}\right)$，从而

$$M\left(\frac{\delta}{64}, \frac{1}{f}\right) < K.$$

（2） 在圆$|z| < \frac{\delta}{16}$内存在一点z_2，使

$$\left|f(z_2)\right|^q + \left|f'(z_2)\right|^q + \cdots + \left|f^{(k)}(z_2)\right|^q + \left|g(z_2)\right| + \left|g'(z_2)\right| < a_1. \tag{3.63}$$

我们又区分两种情形.

(2.1) 在圆$|z| < \frac{\delta}{16}$内，恒有$\left|g'(z)\right| < a_1$. 由此并通过

积分及（3.63）式，有

$$\left|g(z)\right|<\left(\frac{\delta}{8}+1\right)\alpha_1\left(|z|<\frac{\delta}{16}\right).$$

于是

$$\left|f^{(k)}(z)\right|^q<\left(\frac{\delta}{8}+1\right)\alpha_1+A\left(|f|+|f'|+\cdots+|f^{(k-1)}|\right)^q. \tag{3.64}$$

故

$$\left|f^{(k)}(z)\right|<\sqrt[q]{\left(\frac{\delta}{8}+1\right)\alpha_1}+\sqrt[q]{A}\left(|f|+|f'|+\cdots+|f^{(k-1)}|\right)\qquad\left(|z|<\frac{\delta}{16}\right).$$

由上两式并注意到当 $|\zeta|<\frac{\delta}{16}$时，

$$\left|f^{(k-1)}(\zeta)\right|\leqslant\left|\int_{\overline{z_2\zeta}}f^{(k)}(z)dz\right|+\left|f^{(k-1)}(z_2)\right|,$$

就有

$$\left(1-\frac{\delta}{8}\sqrt{A}\right)\max_{|z|\leqslant\frac{\delta}{16}}\left|f^{(k-1)}(z)\right|\leqslant\frac{\delta}{8}\left[\left(\frac{\delta}{8}+1\right)\alpha_1\right]^{\frac{1}{q}}+\frac{\delta}{8}A^{\frac{1}{q}}\left(\max_{|z|\leqslant\frac{\delta}{16}}|f|+\cdots+\max_{|z|\leqslant\frac{\delta}{16}}\left|f^{(k-2)}\right|\right)+\sqrt{\alpha_1}.$$

如此继续下去，计及 δ 的取法（3.60），最后就有

$$\left|f(z)\right|<K \qquad \left(|z|<\frac{\delta}{16}\right).$$

(2.2) 在圆 $|z|<\dfrac{\delta}{16}$ 内存在一点 z_3 使 $\left|g'(z_3)\right|=\alpha_1$，而当 $z\in\overline{z_1z_3}$ 时，$\left|g'(z)\right|\leqslant\alpha_1$. 于是当 $z\in\overline{z_2z_3}$ 时，

$$\left|g(z)\right|\leqslant\left(\frac{\delta}{8}+1\right)\alpha_1.$$

完全类似于情形（2.1）的讨论，得

$$\max_{z\in\overline{z_2z_3}}\left|f(z)\right|\leqslant K.$$

故

$$\left|f(z_3)\right|\leqslant K.$$

我们再区分两种情形.

(2.2.1) $\left|g''(z_3)\right|\geqslant\alpha_2$. 此时根据（3.60）、（3.61）及（3.62）式，可应用引理3.4，再结合定理1.13′，而有

$$\begin{aligned}T(r,\ z_3,\ f)\leqslant K\ \Big\{&1+\log^+\rho'+\log^+\frac{1}{r}+\log^+\frac{1}{\rho'-r}\\&+\log^+T(\rho',\ z_3,\ f)+\log^+T(\rho',\ z_3,\ g)\\&+\log^+T(\rho',\ z_3,g')+\log^+\log^+\frac{1}{|f(z_3)|}\Big\}\\&+3q\log\left|f(z_3)\right|\end{aligned}$$

于 $0<r<\rho'<\rho<\dfrac{\delta}{2}$ 成立，其中 $\rho'=\dfrac{r+\rho}{2}$.

又因

$$T(\rho', z_3, g) \leqslant K\left\{T(\rho', z_3, f) + \sum_{j=1}^{k} m\left(\rho', z_3, \frac{f^{(\ )}}{f}\right)\right\},$$

$$\begin{aligned}T(\rho', z_3, g') &\leqslant 2T(\rho', z_3, g) + m(\rho', z_3, g') \\ &\leqslant 2T(\rho', z_3, g) + KT(\rho', z_3, f) \\ &\quad + K\sum_{j=1}^{k+1} m\left(\rho', z_3, \frac{f^{(\ )}}{f}\right) + K.\end{aligned}$$

再应用定理1.13′于$0<\rho'<\rho<\frac{\delta}{2}$，就有

$$\begin{aligned}T(r, z_3, f) \leqslant K&\left\{1+\log^+\rho+\log^+\frac{1}{r} + \log^+\frac{1}{\rho-r}+\log^+T(\rho, z_3, f)\right.\\ &\left.+\log^+\log^+\frac{1}{|f(z_3)|}\right\}+3q\log|f(z_3)|\end{aligned}$$

$$\left(0<r<\rho<\frac{\delta}{2}\right).$$

对上式应用 Jensen 公式及引理2.3和引理2.5，得

$$T\left(r, z_3, \frac{1}{f}\right) < K\left\{1+\log\frac{\frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}-r}+\log^+\frac{\delta}{2}+\log^+\frac{2}{\delta}\right\}$$

$$\left(0<r<\frac{\delta}{2}\right).$$

也就有

$$\log M\left(\frac{\delta}{8}, \frac{1}{f}\right)<K.$$

(2.2.2) $\left|g''(z_3)\right|<a_2$. 此时又区分为

(2.2.2.1) 在圆 $|z|<\frac{\delta}{16}$内恒有$\left|g''(z)\right|<a_2$. 完全类似于情形 (2.1) 的讨论，我们有

$$|f(z)|<K \quad \left(|z|<\frac{\delta}{16}\right).$$

(2.2.2.2) 在圆 $|z|<\frac{\delta}{16}$内存在一点 z_4，使$\left|g''(z_4)\right|=a_2$，而当 $z\in\overline{z_3z_4}$时，$\left|g''(z)\right|\leqslant a_2$. 于是

$$\left|g'(z_4)\right|\leqslant\left|g'(z_3)\right|+\left|\int_{\overline{z_3z_4}}g''(z)dz\right|\leqslant a_1+\frac{\delta}{8}a_2,$$

$$\left|g'(z_4)\right|\geqslant\left|g'(z_3)\right|-\left|\int_{\overline{z_3z_4}}g''(z)dz\right|\geqslant a_1-\frac{\delta}{8}a_2.$$

而当 $z\in\overline{z_3z_4}$时，

$$\left|g'(z)\right|\leqslant\left|g'(z_3)\right|+\left|\int_{\overline{z_3z}}g''(\zeta)d\zeta\right|\leqslant a_1+\frac{\delta}{8}a_2.$$

因此，当 $z\in\overline{z_3z_4}$时，

$$\left|g(z)\right|\leqslant\left(\frac{\delta}{8}+1\right)\left(a_1+\frac{\delta}{8}a_2\right).$$

再仿照情形 (2.1) 的讨论，可得

$$\left|f(z_4)\right|\leqslant K$$

最后，仿照情形 (2.2.1) 的讨论，就有

$$\log M\left(\frac{\delta}{8}, \frac{1}{f}\right)<K.$$

至此引理证毕.

应用引理3.5，就可证得定理3.15. 事实上，当$q=1$时，可由定理3.14得到. 现设$q\geqslant 2$. 任取定D内一点z_0，作圆$|z-z_0|<\rho$，使$\left(|z-z_0|<\rho\right)\subset D$. 对每个$f(z)\in\left\{f(z)\right\}$，置

$$F(z)=\frac{1}{\rho^k}f(\rho z+z_0),$$

于是，在$|z|<1$内$F(z)\neq 0$且

$$\left\{F^{(k)}(z)\right\}^q+H^*\left(F, F', \cdots, F^{(k-1)}\right)\neq 1,$$

其中H^*为关于F的q次常系数齐次微分多项式. 根据引理3.5存在正常数δ及K，使$\left\{F(z)\right\}$中每个$F(z)$在$|z|<\frac{\delta}{64}$内或者恒有$\left|F(z)\right|<K$，或者恒有$\left|\frac{1}{F(z)}\right|<K$. 由此可知，族$\left\{F(z)\right\}$在$z=0$正规，也即族$\left\{f(z)\right\}$在$z=z_0$正规. 由$z_0$的任意性，即得亚纯函数族$\left\{f(z)\right\}$在区域$D$内的正规性.

上面所建立的正规定则条件中，齐次微分多项式H的各项中不含有$f^{(k)}$的因子. 若H有含$f^{(k)}$的项，那么可建立下面的正规定则：

定理3.16 设$\left\{f(z)\right\}$为区域D内一亚纯函数族. 若族中每个函数$f(z)$在D内满足$f(z)\neq 0$及

$$\left\{f^{(k)}\right\}^q+H(f, f', \cdots, f^{(k)})\neq 1,$$

其中$q\geqslant 3$，H为q次常系数齐次微分多项式，且H中每一项含$f^{(k)}$的次数$\leqslant q-2$，则族$\left\{f(z)\right\}$在D内正规.

由于此定理的证法类似于定理3.15，不再赘述.

另外，陈怀惠还把定理3.13中的条件$f^{(k)}(z)\neq 1$改为$f^{(k)}(z)+P(f)\neq 1$，其中P为f的多项式，次数小于k，有兴趣的读者请参阅陈怀惠[2].

§3.4 涉及重值的亚纯函数族的正规定则

在上一章§2.4中，我们建立了几个涉及重值的全纯函数族的正规定则. 关于亚纯函数族，同样可建立一些涉及重值的正规定则. 我们先给出两个引理.

引理3.6 设$f(z)$在$|z|<R(0<R<+\infty)$内亚纯，$f(0)\neq\infty$，且当$0<r<R$时，$T(r,f)<\lambda$，则$f(z)$在圆$|z|<e^{-\lambda}R$内全纯且

$$\log^+ M\left(\frac{e^{-\lambda}R}{2},\ f\right)<5\lambda.$$

证明 设b为$f(z)$在圆$|z|<R$内的任一极点. 任取$q>1$，则有

$$\log\left|\frac{\frac{R}{q}}{b}\right|\leqslant N\left(\frac{R}{q},\ f\right)<\lambda,$$

令$q\to 1$，就有$|b|\geqslant e^{-\lambda}R$，这就证明了$f(z)$在$|z|<e^{-\lambda}R$内全纯. 同时又有

$$\log^+ M\left(\frac{e^{-\lambda R}}{2}, f\right) \leqslant \frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}} T\left(\frac{3e^{-\lambda R}}{4}, f\right) < 5\lambda.$$

至此引理得证.

引理3.7 设 $\{f(z)\}$ 为区域 D 内一亚纯函数族. k 为一非负整数. 若

1° 存在一正数 A，使对于任一属于 D 的圆 $|z-z_0|<R$ 及任一函数 $f(z)\in\{f(z)\}$，只要 $f(z_0)\neq\infty$，$f^{(k)}(z_0)\neq 0$ 及 $f^{(k+1)}(z_0)\neq 0$，就有

$$T(r, z_0, f) \leqslant A\left\{1+\log^+ R+\log^+\frac{1}{R}+\log\frac{R}{R-r}\right.$$

$$+\sum_{j=0}^{k}\log^+\left|f^{(j)}(z_0)\right|+\log^+\frac{1}{\left|f^{(k)}(z_0)\right|}$$

$$\left.+\log^+\frac{1}{\left|f^{(k+1)}(z_0)\right|}\right\} \tag{3.65}$$

于 $0<r<R$ 成立.

2° 函数族 $\{f(z)\}$ 中，每个函数 $f(z)$ 在区域 D 内的每个零点之级均 $\geqslant k+1$.

则函数族 $\{f(z)\}$ 在区域 D 内正规.

证明 设 z_0 为 D 内任一点. 以下我们只需证明族 $\{f(z)\}$ 在点 z_0 正规. 取定一属于区域 D 的圆 $|z-z_0|<R$ $(0<R<1)$，并置

$$a = A\left\{(k+1)\log\left[3k(2+k)\right] + \log\frac{2}{R} + 2\right\},$$

$$\delta = e^{-a}.$$

任取$f(z) \in \{f(z)\}$，我们区分两种情形.

（1） 在圆$|z - z_0| < \frac{\delta R}{8}$内恒有

$$\sum_{j=0}^{k}\left|f^{(j)}(z)\right| \geqslant 1. \qquad (3.66)$$

此时，我们又区分两种情形.

(1.1) 在圆$|z - z_0| < \frac{\delta R}{128}$内恒有$\left|f(z)\right| \leqslant 1$或恒有

$\left|f(z)\right| \geqslant 1$.

(1.2) 在圆$|z - z_0| < \frac{\delta R}{128}$内存在一点$\zeta$，使

$\left|f(\zeta)\right| = 1$.

再根据（3.66）式及引理条件2°可知，$\frac{1}{f(z)}$在圆$|z - z_0| < \frac{\delta R}{8}$内全纯且

$$T\left(r, \zeta, \frac{1}{f}\right) = m\left(r, \zeta, \frac{1}{f}\right) \leqslant \log(k+1)$$

$$+ \sum_{j=1}^{k} m\left(r, \zeta, \frac{f^{(j)}}{f}\right)$$

于$0 < r < \frac{\delta R}{16}$成立 根据定理1.13′及引理2.5，就有

$$T\left(\frac{\delta R}{32}, \zeta, \frac{1}{f}\right) < K',$$

其中 K' 为仅依赖于k及R的正数．由此得

$$\log^+ M\left(\frac{\delta R}{64},\ \zeta,\ \frac{1}{f}\right) < 3K'.$$

又因 $|\zeta - z_0| < \frac{\delta R}{128}$，从而有

$$\log^+ M\left(\frac{\delta R}{128},\ z_0,\ \frac{1}{f}\right) < 3K'.$$

（2） 在圆 $|z - z_0| < \frac{\delta R}{8}$ 内存在一点 z_1，使

$$\sum_{j=0}^{k}\left| f^{(j)}(z_1)\right| < 1. \tag{3.67}$$

再区分两种情形.

(2.1) 在圆 $|z - z_0| < \frac{\delta R}{8}$ 内恒有 $\left|f^{(k)}(z)\right| \leqslant 2$．于是结合 (3.67) 式可知，在圆 $|z - z_0| < \frac{\delta R}{8}$ 内恒有

$$\left|f(z)\right| < 2 + k.$$

(2.2) 在圆 $|z - z_0| < \frac{\delta R}{8}$ 内存在一点 z_2，使 $\left|f^{(k)}(z_2)\right| > 2$．由此结合 (3.67) 式可知，在圆 $|z - z_0| < \frac{\delta R}{8}$ 内存在一点 z_3，使

$$\left|f^{(k)}(z_3)\right| = 2,\quad \left|f^{(j)}(z_3)\right| < 2 + k \quad (j = 0,\ 1,\ \cdots,\ k-1). \tag{3.68}$$

此时又区分两种情形.

(2.2.1) $\left|f^{(k+1)}(z_3)\right|\geqslant 1$. 根据引理条件1°就有

$$T\left(\frac{R}{2},\ z_3,\ f\right)<a.$$

于是由引理3.6，有

$$\log^+M\left(\frac{\delta R}{4},\ z_3,\ f\right)<5a.$$

由于$|z_3-z_0|<\frac{\delta R}{8}$，因而

$$\log^+M\left(\frac{\delta R}{8},\ z_0,\ f\right)<5a.$$

(2.2.2) $\left|f^{(k+1)}(z_3)\right|<1$. 此时我们再区分两种情形.

(2.2.2.1) 在圆$|z-z_0|<\frac{\delta R}{8}$内恒有$\left|f^{(k+1)}(z)\right|\leqslant 1$.

于是结合(3.67)式可知，在圆$|z-z_0|<\frac{\delta R}{8}$内恒有

$$\left|f(z)\right|<2+k.$$

(2.2.2.2) 在圆$|z-z_0|<\frac{\delta R}{8}$内存在一点$z_4$，使

$\left|f^{(k+1)}(z_4)\right|>1$. 于是在圆$|z-z_0|<\frac{\delta R}{8}$内存在一点$z_5$，使

$$\left|f^{(k+1)}(z_5)\right|=1,\quad \left|f^{(k+1)}(z)\right|\leqslant 1\quad \left(z\in\overline{z_3z_5}\right).$$

由此并结合(3.68)式，可有下列估计：

$$\left|f^{(k)}(z_5)\right|\leqslant\left|f^{(k)}(z_3)\right|+\left|\int_{\overline{z_3z_5}}f^{(k+1)}(z)dz\right|<3,$$

$$\left|f^{(k)}(z_5)\right|\geqslant\left|f^{(k)}(z_3)\right|-\left|\int_{\overline{z_3z_5}}f^{(k+1)}(z)dz\right|>1,$$

$$\left|f^{(j)}(z_5)\right|<3+k(2+k) \quad (j=0,\ 1,\ \cdots,\ k-1).$$

故根据引理条件1°而有

$$T\left(\frac{R}{2},\ z_5,\ f\right)<a.$$

再根据引理3.6，得

$$\log^+M\left(\frac{\delta R}{4},\ z_5,\ f\right)<5a.$$

最后由不等式$|z_5-z_0|<\frac{\delta R}{8}$，可得

$$\log^+M\left(\frac{\delta R}{8},\ z_0,\ f\right)<5a.$$

综合上述各种情形可知，函数$f(z)$在圆$|z-z_0|<\frac{\delta R}{128}$内或者恒有$\left|f(z)\right|<K$，或者恒有$\left|\frac{1}{f(z)}\right|<K$，其中$K$为仅依赖于$k$、$R$及$A$的正常数，故族$\left\{f(z)\right\}$在点$z_0$正规．至此引理证毕．

下面我们给出由Bloch与Valiron所建立的正规定则．

定理3.17 设$\left\{f(z)\right\}$为区域D内一亚纯函数族．若对族中每个函数$f(z)$，$f(z)-a_i$在D内的零点之级$\geqslant m_i$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ q)$，其中a_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ q)$为q个互相判别的复数(有穷或无穷)，$q\geqslant 3$，且

$$\sum_{i=1}^{q}\left(1-\frac{1}{m_i}\right)>2,$$

则族 $\left\{f(z)\right\}$ 在 D 内正规.

显然，根据引理3.7，我们只需证如下引理.

引理3.8 设函数 $f(z)$ 在 $|z|<R$（$0<R<+\infty$）内亚纯，$f(z)-a_i$ 的零点之级 $\geqslant m_i$（$i=1, 2, \cdots, q$），其中 a_i（$i=1, 2, \cdots, q$）为 q 个互相判别的复数（有穷或无穷），$q\geqslant 3$. 若

$$\sum_{i=1}^{q}\left(1-\frac{1}{m_i}\right)>2, \tag{3.69}$$

且 $f(0)\neq\infty$，$f'(0)\neq 0$，则当 $0<r<R$ 时，有

$$T(r, f)\leqslant K\left\{1+\log^+\frac{1}{R}+\log^+R+\log\frac{R}{R-r}\right.$$
$$\left.+\log^+\left|f(0)\right|+\log^+\frac{1}{\left|f'(0)\right|}\right\}, \tag{3.70}$$

其中 K 为仅依赖于 q，m_i，a_i（$i=1, 2, \cdots, q$）的正常数.

证明 先设 a_i（$i=1, 2, \cdots, q$）均为有穷数，且 $f(0)\neq 0, a_i (i=1,2\cdots,q)$. 应用Nevanlinna 第二基本定理(定理1.11)，有

$$(q-2)T(r, f)<\sum_{i=1}^{q}\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right)+S(r, f)$$
$$(0<r<R), \tag{3.71}$$

其中

$$S(r, f)=\sum_{i=1}^{q}\log\left|f(0)-a_i\right|+m\left(r, \frac{f'}{f-a_1}\right)$$
$$+\sum_{i=1}^{q}m\left(r, \frac{f'}{f-a_i}\right)$$

$$+\log\frac{1}{|f'(0)|}+q\log^{+}\frac{2q}{\delta}+\log 2,$$

$$\delta=\min_{1\leq i_1<i_2\leq q}|a_{i_1}-a_{i_2}|.$$

又根据引理条件，有

$$\overline{\overline{N}}\left(r,\frac{1}{f-a_i}\right)\leqslant\frac{1}{m_i}N\left(r,\frac{1}{f-a_i}\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{m_i}\left\{T(r,f)+\log^{+}|a_i|+\log 2+\log\frac{1}{|f(0)-a_i|}\right\}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ q)\qquad(3.72)$$

由（3.69）、（3.71）及（3.72）式，得

$$T(r,f)<K\left\{1+\sum_{i=1}^{q}\log|f(0)-a_i|+\log\frac{1}{|f'(0)|}+\sum_{i=1}^{q}m\left(r,\frac{f'}{f-a_i}\right)\right\}.$$

再应用定理1.13、引理2.3及引理2.5，就知（3.70）式成立

当$f(0)=0$或$f(0)=a_i$时，可取一点列z_n，使$z_n\to 0$（$n\to\infty$）且$f(z_n)\neq 0$，$f(z_n)\neq a_i$（$i=1$，2，…，q，$n=1$，2，…），应用（3.70）式于$f_n(z)=f(z+z_n)$及圆$|z|<R-|z_n|$上，再令$n\to\infty$就知引理结论仍成立.

当a_i（$i=1$，2，…，q）中有一个为无穷时，作f的一个适当的线性变换，就可化成上面的情形．至此引理证毕.

涉及导数与重值，杨乐与张广厚[1]获得了一个一般性的正

规定则．作者[1]改进了他们的结果，并由此完全证实了Hayman的一个猜想．

定理3.18 设$\{f(z)\}$为区域D内一亚纯函数族，其中每个函数$f(z)$的极点之级$\geqslant s$（$\geqslant 1$），$f(z)$取p（$\geqslant 1$）个互相判别的有穷值a_i（$i=1,\cdots,p$）的点之级分别$\geqslant m_i$（$\geqslant 2$），$f^{(k)}(z)$取q（$\geqslant 1$）个互相判别的非零有穷值b_j（$j=1,\cdots,q$）的点之级分别$\geqslant n_j$（$\geqslant 2$）．若

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{kq+1}{m_i}+\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{n_j}+\frac{1}{s}\left(1+k\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{n_j}\right)<pq, \tag{3.73}$$

$$q>\frac{kq+1}{m_i} \qquad (i=1,\cdots,p), \tag{3.74}$$

则族$\{f(z)\}$在区域D内正规．

为证此定理，我们先证如下引理：

引理3.9 设$f(z)$在$|z|<R$（$0<R<+\infty$）内亚纯．又设$f(z)$的极点之级$\geqslant s$（$\geqslant 1$），$f(z)$取p（$\geqslant 1$）个互相判别的有穷值a_i（$i=1,2,\cdots,p$）的点之级分别$\geqslant m_i$（$\geqslant 2$），$f^{(k)}(z)$取q（$\geqslant 1$）个互相判别的非零有穷值b_j（$j=1,2,\cdots,q$）的点之级分别$\geqslant n_j$（$\geqslant 2$），且（3.73）与（3.74）式成立．若$f(0)\neq\infty$，$f^{(k)}(0)\neq 0$及$f^{(k+1)}(0)\neq 0$，则当$0<r<R$时，

$$T(r,f)\leqslant K\left\{1+\log^+R+\log^+\frac{1}{R}+\log\frac{R}{R-r}\right.$$

$$+\log^+|f(0)|+\log^+|f^{(k)}(0)|$$

$$+\log^{+}\frac{1}{\left|f^{(k)}(0)\right|}+\log^{+}\frac{1}{\left|f^{(l+1)}(0)\right|}\Bigg\},\quad(3.75)$$

其中 K 为仅依赖于 p, q, k, m, 及 n_j 的正常数.

证明 先设

$$f(0)\neq 0,\ a_i\ (i=1,2,\cdots,p),\ f^{(k)}(0)\neq b_j\ (j=1,2,\cdots,q).\quad(3.76)$$

置

$$F(z)=\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{f(z)-a_i}.$$

于是，类似（1.47）式的推导，有

$$m(r,F)\geqslant\sum_{i=1}^{p}m\left(r,\frac{1}{f-a_i}\right)-p\log^{+}\frac{2p}{\delta}-\log 2,\quad(3.77)$$

其中 $\delta=\min\limits_{1\leq i<j\leq p}|a_i-a_j|$

另外，

$$m(r,F)\leqslant m(r,f^{(k)}F)+m\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)$$

$$\leqslant m(r,f^{(k)}F)+T(r,f^{(k)})-N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)$$

$$+\log\frac{1}{\left|f^{(k)}(0)\right|}$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{p}m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f-a_i}\right)+T(r,f^{(k)})$$

$$-N\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+\log p+\log\frac{1}{\left|f^{(k)}(0)\right|}.$$

结合（3.77）式，就有

$$\sum_{i=1}^{p} m\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f-a_i}\right)$$

$$+T(r, f^{(k)})+N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right)$$

$$+\log\frac{1}{\left|f^{(k)}(0)\right|}+\log p$$

$$+p\log^{+}\frac{2p}{\delta}+\log 2.$$

再根据 Nevanlinna 第一基本定理（定理1.7），有

$$pT(r, f) \leqslant \sum_{i=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right)+T(r, f^{(k)})$$

$$-N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{p} m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f-a_i}\right)+\sum_{i=1}^{p}\log\left|f(0)-a_i\right|$$

$$+\log\frac{1}{\left|f^{(k)}(0)\right|}. \tag{3.78}$$

又应用第二基本定理（定理1.11）于 $f^{(k)}(z)$ 及 $q+2$ 个点 0，∞，b_j（$j=1, \cdots q$），则有

$$qT(r, f^{(k)}) \leqslant \sum_{j=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-b_j}\right)+N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right)$$

$$+\overline{N}(r, f^{(k)}) - N\left(r, \frac{1}{f^{(k+1)}}\right)+S_1(r), \tag{3.79}$$

其中

$$S_1(r)=2m\left(r,\ \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}}\right)+\sum_{j=1}^{n}m\left(r,\ \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-b_j}\right)$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\log\left|f^{(k)}(0)-b_j\right|$$

$$+\log\left|f^{(k)}(0)\right|+\log\frac{1}{\left|f^{(k+1)}(0)\right|}+K.$$

由（3.78）及（3.79）式，得

$$pqT(r,\ f)\leqslant\overline{N}\ (r,\ f)\ +\ (q-1)\left\{\sum_{i=1}^{p}N\left(r,\ \frac{1}{f-a_i}\right)\right.$$

$$\left.-N\left(r,\ \frac{1}{f^{(k)}}\right)\right\}$$

$$+\left\{\sum_{i=1}^{p}N\left(r,\ \frac{1}{f-a_i}\right)\right.$$

$$\left.-N\left(r,\ \frac{1}{f^{(k+1)}}\right)\right\}+S(r),\tag{3.80}$$

其中$S(r)=S_1(r)+q\sum_{i=1}^{p}m\left(r,\ \frac{f^{(k)}}{f-a_i}\right)+q\sum_{i=1}^{p}\log\left|f(0)-a_i\right|$

$$+q\log\frac{1}{\left|f^{(k)}(0)\right|}+K.$$

另外，由引理条件知，

$$\overline{N}(r,\ f)\leqslant\frac{1}{s}N(r,\ f)\leqslant\frac{1}{s}T(r,\ f),\tag{3.81}$$

$$\sum_{i=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) - N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right)$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{p} \frac{k}{m_i} N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right)$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{p} \frac{k}{m_i} \left\{T(r, f) + \log\frac{1}{|f(0)-a_i|}\right.$$

$$\left. + \log^+|a_i| + \log 2\right\},$$

(3.82)

$$\sum_{i=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + \sum_{j=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-b_j}\right) - N\left(r, \frac{1}{f^{(k+1)}}\right)$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{p} \frac{k+1}{m_i} N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{n_j} N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-b_j}\right)$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{p} \frac{k+1}{m_i} \left\{T(r, f) + \log\frac{1}{|f(0)-a_i|}\right.$$

$$\left. + \log^+|a_i| + \log 2\right\} + \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{n_j} T\left(r, \frac{1}{f^{(k)}-b_j}\right).$$

(3.83)

而

$$T\left(r,\ \frac{1}{f^{(k)}-b_j}\right) \leqslant T(r,\ f^{(k)}) + \log\frac{1}{\left|f^{(k)}(0)-b_j\right|}$$

$$+\log^+|b_j| + \log 2$$

$$\leqslant T(r,\ f) + k\overline{\overline{N}}(r,\ f) + m\left(r,\ \frac{f^{(k)}}{f-a_1}\right)$$

$$+\log\frac{1}{\left|f^{(k)}(0)-b_j\right|} + \log^+|a_1|$$

$$+\log^+|b_j| + 2\log 2\,. \qquad (3.84)$$

综合（3.80）～（3.84）式，则有

$$\left\{pq-\sum_{i=1}^{p}\frac{pq+1}{m_i}-\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{n_j}-\frac{1}{m}\left(1+k\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{n_j}\right)\right\}T(r,\ f)$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{n_j}\,m\left(r,\ \frac{f^{(k)}}{f-a_1}\right)+q\sum_{i=1}^{p}m\left(r,\ \frac{f^{(k)}}{f-a_i}\right)$$

$$+2m\left(r,\ \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}}\right)+\sum_{j=1}^{q}m\left(r,\ \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-b_j}\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{p}\left(q-\frac{kq+1}{m_i}\right)\log\left|f(0)-a_i\right|$$

$$+\sum_{j=1}^{q}\left(1-\frac{1}{n_j}\right)\log\left|f^{(k)}(0)-b_j\right|-(q-1)\log\frac{1}{\left|f^{(k)}(0)\right|}$$

$$+\log\frac{1}{\left|f^{(k+1)}(0)\right|}+K.$$

再根据条件（3.73）与（3.74），并应用定理1.13′，引理2.3及引理2.5，就可推出（3.75）式成立.

最后，当（3.76）式不成立时，我们采用类似于引理3.8中的证法，可知（3.75）式仍然成立．至此引理证毕．

应用引理3.9及引理3.7就可证明定理3.18成立．事实上，对每个函数 $f(z)\in\left\{f(z)\right\}$，令 $g(z)=f(z)-a_1$，由条件（3.74）知，$g(z)$的零点之级$\geqslant k+1$．再由引理3.9可知，族$\left\{g(z)\right\}$满足引理3.7中的条件1°与2°，故$\left\{g(z)\right\}$在区域D内正规，也即族$\left\{f(z)\right\}$在D内正规．

在定理3.18中取$s>1$，$p=1$及$q=1$，就有

定理3.19　设$\left\{f(z)\right\}$为区域D内一亚纯函数族，其中每个函数$f(z)$的极点之级均$\geqslant s$，$f(z)$取一有穷值a的点之级均$\geqslant m$，$f^{(k)}(z)$取一非零有穷值b的点之级均$\geqslant n$，且$\frac{k+1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{s}\left(1+\frac{k}{n}\right)<1$，则族$\left\{f(z)\right\}$在$D$内正规．

由此定理立即证实Hayman的如下猜想：

定理3.20　设$\left\{f(z)\right\}$为区域D内一亚纯函数族．若对于一正整数$n\geqslant 3$，族中每个函数$f(z)$在D内满足$f'(z)f(z)^n\neq 1$，则函数族$\left\{f(z)\right\}$在区域D内正规．

事实上，若置$\varphi(z)=f(z)^{n+1}$，则在区域D内$\varphi'(z)\neq n+1$，且$\varphi(z)$的极点与零点之级均$\geqslant n+1$．又因$n\geqslant 3$而有$\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+1}<1$，故应用定理3.19于函数族$\left\{\varphi(z)\right\}$可知族$\left\{\varphi(z)\right\}$

在 D内正规．由此易推出族 $\{f(z)\}$ 的正规性．

§3.5 Zalcman方法

到目前为止，本书中在证明正规定则时所贯用的方法是先建立界囿定理，再消去原始值．而 Zalcman[1] 开辟另外的途径，从 Marty 正规定则出发建立了一族亚纯函数不正规的一个充要条件，我们可称为 Zalcman 引理．Zalcman 从该引理导出了一个有趣的正规定则．Ошкин[1]利用 Zalcman 引理最终证实了 Hayman 的一个猜想（即下面的定理3.22），随后，李松鹰[1]也用类似的方法证实了 Hayman的另一猜想（即下面的定理3.24．与此同时，李先进[1]与 Langley[1]也各自独立地证实了这个猜想）．最近，庞学诚[1]推广了 Zalcman 的正规定则，并由此获得新的正规定则．

以下，我们首先应用 Zalcman 引理证明三个正规定则，其中两个即为上述的猜想，另一个也是Hayman的猜想（即定理3.23），它是与定理3.24相对应的全纯函数的情形，已被 Drasin[1] 所解决．这三个猜想是本书对于 Hayman 在其文[2]中提出的关于正规族的全部猜想中至今还未加以证明的最后三个．然后，我们再给出由庞学诚推广了的 Zalcman 正规定则．

我们先给出 Zalcman 引理（即定理3.21）及由李松鹰与谢晖春[1]推广了的 Zalcman 引理（即定理3.21′）．它们的证明自然可统一进行．

定理3.21 区域 D 内的一亚纯函数族 $\{f(z)\}$ 在某点 $z_0\in$

D 不正规的充要条件是，族 $\{f(z)\}$ 中存在一序列 $f_n(z)$，存在一点列 z_n 及一正数列 t_n，使函数列 $f_n(z_n+t_n z)$ 在开平面上内闭一致收敛于非常数的亚纯函数，其中 $z_n \to z_0$，$t_n \to 0$ $(n\to\infty)$.

定理3.21′ 设 $\{f(z)\}$ 为区域 D 内一亚纯函数族，k为一正整数，且族 $\{f(z)\}$ 中每个函数 $f(z)$ 的零点之级均$\geqslant k$，则族 $\{f(z)\}$ 在某点 $z_0\in D$ 不正规的充要条件是，族 $\{f(z)\}$ 中存在一序列$f_n(z)$，存在一点列z_n及一正数列 t_n，使函数序列 $f_n(z_n+t_n z)$ 在开平面上内闭一致收敛于亚纯函数 $g(z)$，其中$g^{(k)}(z)\not\equiv 0$，而 $z_n\to z_0$，$t_n\to 0$ $(n\to\infty)$.

证明 不失一般性，设 $z_0=0$. 先证条件是必要的. 取定一正整数n'，使圆 $\left(|z|<\frac{1}{n'}\right)\subset D$. 对任意给定的正整数 n $(\geqslant n')$，由定理 3.11′，存在函数 $f_n(z)\in\{f(z)\}$ 及一点z_n^*，$|z_n^*|<\frac{1}{2n}$，使

$$\frac{\left|f_n^{(\,)}(z_n^*)\right|}{1+\left|f_n(z_n)\right|^{k+1}}>n^{k+1}\qquad (n=n_1,\ n_1+1,\ \cdots). \tag{3.85}$$

因$(1-n|z|)^k\dfrac{\left|f_n^{(k)}(z)\right|}{1+\left|f_n(z)\right|^{k+1}}$在$|z|\leqslant\frac{1}{n}$上连续，故存在点

z_n：$|z_n|\leqslant\frac{1}{n}$，使

$$M_n=\max_{|z|\leq\frac{1}{n}}\left\{(1-n|z|)^k\frac{\left|f_n^{(k)}(z)\right|}{1+\left|f_n(z)\right|^{k+1}}\right\}$$

$$=\left(1-n|z_n|\right)^k\frac{\left|f_n^{(k)}(z_n)\right|}{1+\left|f_n(z_n)\right|^{k+1}} \tag{3.86}$$

结合（3.85）式，就有

$$M_n>\frac{n^{(k+1)}}{2^k}\qquad(n\geqslant n_1). \tag{3.87}$$

置

$$t_n=\frac{\left(1-n|z_n|\right)^k}{M_n}=\frac{1+\left|f_n(z_n)\right|^{k+1}}{\left|f_n^{(k)}(z_n)\right|}, \tag{3.88}$$

$$g_n(z)=f_n\left(z_n+t_n^{\frac{1}{k}}z\right)\qquad(n\geqslant n_1).$$

这时，

$$\frac{\left|g_n^{(k)}(z)\right|}{1+\left|g_n(z)\right|^{k+1}}=\frac{t_n\left|f_n^{(k)}(z_n+t_n^{\frac{1}{k}}z)\right|}{1+\left|f_n(z_n+t_n^{\frac{1}{k}}z)\right|^{k+1}}$$

$$=\frac{t_n}{\left(1-n\left|z_n+t_n^{\frac{1}{k}}z\right|\right)^k}$$

$$\times\left(1-n\left|z_n+t_n^{\frac{1}{k}}z\right|\right)^k$$

$$\times \frac{\left|f_n^{(\ )}(z_n + t_n^{\frac{1}{k}} z)\right|}{1 + \left|f_n(z_n + t_n^{\frac{1}{k}} z)\right|^{k+1}}$$

(3.89)

另外由（3.87）及（3.88）式可知，

$$\frac{\left(\frac{1}{n} - |z_n|\right)^k}{t_n} = \frac{M_n}{n^k} > \frac{n}{2^k}. \qquad (3.90)$$

故任意取定正数 R，当 n 充分大时，$\dfrac{\left(\frac{1}{n} - |z_n|\right)^k}{t_n} > R^k$. 于是，

当 $|z| < R$ 时，

$$\left|z_n + t_n^{\frac{1}{k}} z\right| < \frac{1}{n}.$$

再结合（3.89），（3.86）及（3.88）式，就有

$$\frac{\left|g_n^{(\ )}(z)\right|}{1 + \left|g_n(z)\right|^{k+1}} \leqslant \frac{t_n M_n}{\left(1 - n\left|z_n + t_n^{\frac{1}{k}} z\right|\right)^k}$$

$$= \frac{\left(1 - n|z_n|\right)^k}{\left(1 - n\left|z_n + t_n^{\frac{1}{k}} z\right|\right)^k}$$

$$\leqslant \frac{\left(1 - n|z_n|\right)^k}{\left(1 - n|z_n| - n t_n^{\frac{1}{k}} R\right)^k}$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{t_n^{\frac{1}{k}}}{\frac{1}{n} - |z_n|} R\right)^k}.$$

再顾及（3.90）式，当$|z|<R$且n充分大时，就得

$$\frac{|g_n'(z)|}{1+|g_n(z)|^2} \leqslant K.$$

因此，根据定理3.11，族$\{g_n(z)\}$在$|z|<R$内正规．故根据定理3.8，存在$g_n(z)$的一子列仍记为$g_n(z)$，在$|z|<R$上依球面距离内闭一致趋于亚纯函数或内闭一致趋于∞，又因R为任意正数且

$$\frac{|g_n^{(k)}(0)|}{1+|g_n(0)|^{k+1}} = 1 \qquad (n \geqslant n_1),$$

故$g_n(z)$即$f_n(z_n + t_n^{\frac{1}{k}} z)$在开平面上依球面距离内闭一致趋于亚纯函数$g(z)$且$g^{(k)}(z) \not\equiv 0$

现再证条件的充分性．设$f_n(z_n + t_n^{\frac{1}{k}} z)$在开平面上依球距内闭一致趋于亚纯函数$g(z)$，其中$g^{(k)}(z) \not\equiv 0$．假定族$\{f(z)\}$在$z=0$正规即族$\{f(z)\}$在某圆$|z|<r$内正规．由定理3.11′，存在$M>0$使族$\{f(z)\}$中每个$f(z)$在$|z|\leqslant\frac{r}{2}$上，恒有

$$\frac{\left|f^{(k)}(z)\right|}{1+\left|f(z)\right|^{k+1}}\leqslant M.$$

任意固定 z，当 n 充分大时，$|z_n+t_n z|<\frac{r}{2}$，因而

$$t_n\frac{\left|f_n^{(k)}(z_n+t_n^{\frac{1}{k}}z)\right|}{1+\left|f_n(z_n+t_n^{\frac{1}{k}}z)\right|^{k+1}}\leqslant t_n M.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|g_n^{(k)}(z)\right|}{1+\left|g_n(z)\right|^{k+1}}=\lim_{n\to\infty}t_n\frac{\left|f_n^{(k)}(z_n+t_n^{\frac{1}{k}}z)\right|}{1+\left|f_n(z_n+t_n^{\frac{1}{k}}z)\right|^{k+1}}$$

$$=0.$$

即

$$\frac{\left|g^{(k)}(z)\right|}{1+\left|g(z)\right|^{k+1}}=0.$$

由 z 的任意性，得 $g^{(k)}(z)\equiv 0$，从而矛盾. 至此定理证毕.

现在，我们开始证明上述的三个猜想.

定理3.22 设 $\{f(z)\}$ 为区域 D 内一全纯函数族，p 为一正整数. 若族 $\{f(z)\}$ 中每个函数 $f(z)$ 在区域 D 内满足 $f'f^p\neq 1$，则族 $\{f(z)\}$ 在 D 内正规.

根据定理2.8的推论，我们只需证明这个定理当 $p=1$ 时成立. 我们先证一个引理.

引理3.10 设 $f(z)$ 于 $|z|\leqslant R$ $(0<R<\infty)$ 全纯．置

$$u(z)=f(z)\cdot f'(z),\quad v(z)=u'(z),\quad h(z)=\frac{v'(z)}{v(z)},$$

$k(z)=h(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}-3\dfrac{f''(z)}{f(z)}$．又设 $f(0)\neq 0$，$u(0)\neq 0$，1，$v(0)\neq 0$ 及 $3h'(0)-2h(0)^2-12k(0)\neq 0$，则当 $0<r<R$ 时，

$$T(r,f)<K\left\{1+\log^+\frac{1}{R}+\log^+R+\log^+\frac{R}{R-r}\right.$$

$$+N\left(R,\frac{1}{u-1}\right)+\log^+|f(0)|+\log^+\frac{1}{|u(0)|}$$

$$+\log^+\frac{1}{|u'(0)|}+\log^+\frac{1}{|u(0)-1|}+\log^+\left|\frac{u(0)-1}{u'(0)}\right|$$

$$\left.+\log^+\frac{1}{|3h'(0)-2h(0)^2-12k(0)|}\right\}.$$

(3.91)

证明 因

$$m\left(r,\frac{1}{f^2}\right)=m\left(r,\frac{f'}{f}\frac{1}{f'f}\right)\leqslant m\left(r,\frac{f'}{f}\right)$$

$$+m\left(r,\frac{1}{u}\right)$$

及

$$m\left(r,\frac{1}{u}\right)=m\left(r,\frac{u'}{u}\frac{u-1}{u'}-1\right)$$

$$\leqslant \log 2 + m\left(r, \frac{u'}{u}\right) + m\left(r, \frac{u-1}{u'}\right)$$

$$\leqslant \log 2 + m\left(r, \frac{u'}{u}\right) + m\left(r, \frac{u'}{u-1}\right)$$

$$+ N\left(r, \frac{1}{u-1}\right) - N\left(r, \frac{1}{u'}\right)$$

$$+ \log\left|\frac{u(0)-1}{u'(0)}\right|,$$

于是

$$T(r, f^2) = m\left(r, \frac{1}{f^2}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^2}\right) + 2\log|f(0)|$$

$$\leqslant N\left(r, \frac{1}{u-1}\right) + 2N\left(r, \frac{1}{f}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right)$$

$$+ m\left(r, \frac{u'}{u}\right) + m\left(r, \frac{u'}{u-1}\right)$$

$$+ 2\log|f(0)| + \log\left|\frac{u(0)-1}{u'(0)}\right| + \log 2. \tag{3.92}$$

以下估计$N\left(r, \frac{1}{f}\right)$.

显然，$f(z)$ 的重级零点必为 $v(z)$ 的同级零点，另外可直接验证 $f(z)$ 的单级零点必为$3h' - 2h^2 - 12k$ 的零点. 下面我们再指出$3h' - 2h^2 - 12k$ 的极点必为 $v(z)$ 的零点. 事实上，若 a 为$3h' - 2h^2 - 12k$ 的极点，则 a 就不是 $f(z)$ 的单级零点. 于是，或者 $f(a) = 0$ 且 $f'(a) = 0$，或若 $f(a) \neq 0$. 若是前者则 $v(a) = 0$，若是后者，根据 $h(z)$ 及$k(z)$ 的表达式可知$v(a) = 0$. 另外$3h' - 2h^2 - 12k$ 的极点之级不大于 2. 通过上述分析，我们有

$$N_{(2}\left(r,\ \frac{1}{f}\right)\leqslant N\left(r,\ \frac{1}{v}\right)=N\left(r,\ \frac{1}{u'}\right),$$

$$N_{1)}\left(r,\ \frac{1}{f}\right)\leqslant N\left(r,\ \frac{1}{3h'-2h^2-12k}\right)$$

$$\leqslant T(r,\ 3h'-2h^2-12k)$$

$$+\log\frac{1}{|3h'(0)-2h(0)^2-12k(0)|}$$

$$=N(r,3h'-2h^2-12k)+m(r,3h'-2h^2-12k)$$

$$+\log\frac{1}{|3h'(0)-2h(0)^2-12k(0)|}.$$

而

$$N(r,\ 3h'-3h^2-12k)\leqslant 2N\left(r,\ \frac{1}{v}\right)=2N\left(r,\ \frac{1}{u'}\right).$$

$$N\left(r,\ \frac{1}{u'}\right)\leqslant N\left(r,\ \frac{u-1}{u'}\right)+N\left(r,\ \frac{1}{u-1}\right)$$

$$\leqslant 2N\left(r,\ \frac{1}{u-1}\right)+m\left(r,\ \frac{u'}{u-1}\right)$$

$$+\log\left|\frac{u(0)-1}{u'(0)}\right|,$$

$$m(r,\ 3h'-2h^2-12k)\leqslant K+5m\left(r,\ \frac{v'}{v}\right)$$

$$+m\left(r,\ \frac{v''}{v}\right)+m\left(r,\ \frac{f'}{f}\right).$$

于是，由上述各式及（3.92）式，得

$$T(r,\ f)<K\left\{1+N\left(r,\ \frac{1}{u-1}\right)+m\left(r,\ \frac{f'}{f}\right)\right.$$

$$+m\left(r,\ \frac{f''}{f}\right)+m\left(r,\ \frac{u''}{u}\right)+m\left(r,\ \frac{u'}{u-1}\right)$$

$$+m\left(r,\ \frac{v'}{v}\right)+m\left(r,\ \frac{v''}{v}\right)\Big\}$$

$$+2\log|f(0)|+7\log\left|\frac{u(0)-1}{u'(0)}\right|$$

$$+2\log\frac{1}{|3h'(0)-2h(0)^2-12k(0)|}.$$

再根据定理1.13′，引理2.3及引理2.5，就有（3.91）式.

我们还需一个引理：

引理3.11 设 $f(z)$为非常数的整函数，$u(z)=f(z)f'(z)$，$v(z)=u'(z)$，$h(z)=\frac{v'(z)}{v(z)}$、$k(z)=h(z)\frac{f'(z)}{f(z)}-3\frac{f''(z)}{f(z)}$. 若 $v'(z)\not\equiv 0$，则$3h'(z)-2h(z)^2-12k(z)\not\equiv 0$.

证明 假定结论不成立，即

$$3h'(z)-2h(z)^2-12k(z)\equiv 0, \tag{3.93}$$

于是，根据恒等式

$$f'(3h'-2h^2-12k)\equiv f(3k'-2hk)$$

而有

$$3k'(z)-2h(z)k(z)\equiv 0. \tag{3.94}$$

对（3.93）式求导，有

$$3h''-4hh'-12k'\equiv 0. \tag{3.95}$$

由（3.94）与（3.95）式消去k'，得

$$3h''-4hh'-8hk\equiv 0. \tag{3.96}$$

又由（3.93）与（3.96）式消去k，得

$$9h''-18hh'+4h^3\equiv 0. \tag{3.97}$$

根据条件，$h(z)\not\equiv 0$. 我们对 $h(z)$ 区分三种情形讨论.

（1） $h(z)$有极点 a. 此时 a 必为 $h(z)$ 的单级极点，且在点 a有如下展式

$$h(z)=\frac{m}{z-a}+a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\cdots,$$

其中m 为正整数. 于是

$$9h''(z)-18h(z)h'(z)+4h(z)^3=\frac{18m+18m^2+4m^3}{(z-a)^3}$$

$$+\frac{b_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{b_{-1}}{z-a}+b_0+\cdots,$$

这与（3.97）式矛盾.

（2） $h(z)$为非零多项式. 此时（3.97）式也不能成立，从而矛盾.

（3） $h(z)$为超越整函数. 改写（3.97）式为

$$4h^2-18h'=-9\frac{h''}{h}.$$

由此，根据定理1.13′知，除去r 的一个线性测度有限的集合外，有

$$m(r,\ 4h^2-18h')=o\left\{m(r,\ h)\right\}\qquad(r\to+\infty).$$

于是除去r的一个线性测度有限的集合外，有

$$m(r,4h^2)=m(r,\ 4h^2-18h'+18h'(\leqslant m(r,h')+o\{m(r,\ h)\}$$

$$\leqslant m(r,h)+o\{m(r,h)\}\quad(r\to+\infty).\qquad(3.98)$$

另外

$$2m(r,h)=m(r,h^2)\leqslant m(r,4h^2)\qquad(3.99)$$

由（3.98）及（3.99）式，得

$$2m(r,h)\leqslant m(r,h)+o\{m(r,h)\}\quad(r\to+\infty).$$

在除去γ的一个线性测度有限的集合外成立. 这是不可能的，从而矛盾. 至此引理证毕.

现在我们来证明定理3.22. 假定族$\{f(z)\}$在某点$z_0\in D$不正规，不妨设$z_0=0$. 于是根据Zalcman的结果（定理3.21），族$\{f(z)\}$中存在一列函数$\{f_n(z)\}$，以及一点列z_n与一正数列t_n: $z_n\to 0$，$t_n\to 0$ $(n\to\infty)$，使$f_n(z_n+t_nz)$在开平面上依球距内闭一致趋于亚纯函数$g(z)$，且$g'(z)\neq 0$. 因$\{f(z)\}$为全纯函数族，故$g(z)$为非常数整函数. 置

$$u(z)=g(z)g'(z),\quad v(z)=u'(z),$$

$$h(z)=\frac{v'(z)}{v(z)},\quad k(z)=h(z)\frac{g'(z)}{g(z)}-3\frac{g''(z)}{g(z)}.$$

首先指出$v'(z)\not\equiv 0$，假定$v'(z)\equiv 0$，不难推出$g(z)=az+b$，其中$a\neq 0$. 置

$$G_n(z)=t_nf_n'(z_n+t_nz)f_n(z_n+t_nz)-t_n,$$

则$G_n(z)$在开平面上内闭一致趋于$a(az+b)$. 而根据定理条件，$G_n(z)\neq 0$，故$a(az+b)\neq 0$，这是不可能的. 这样我们就证得$v'(z)\not\equiv 0$.

再根据引理3.11，$3h'(z)-2h(z)^2-12k(z)\not\equiv 0$. 于是存在点$z_0$使

$$g(z_0)\neq 0,\quad u(z_0)\neq 0,\quad u'(z_0)\neq 0$$

及

$$3h'(z_0)-2h(z_0)^2-12k(z_0)\neq 0. \tag{3.100}$$

置

$$\varphi_n(z)=f_n(z+z_n+t_nz_0),\quad u_n(z)=\varphi_n'(z)\varphi_n(z),$$

$$v_n(z)=u_n'(z),$$

$$h_n(z)=\frac{v_n'(z)}{v_n(z)},\quad k_n(z)=h_n(z)\frac{\varphi_n'(z)}{\varphi_n(z)}-3\frac{\varphi_n''(z)}{\varphi_n(z)}.$$

容易验证，

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\varphi_n(0)=g(z_0),\ \lim_{n\to\infty}t_nu_n(0)=u(z_0),\\&\lim_{n\to\infty}t_nh_n(0)=h(z_0),\lim_{n\to\infty}t_n^2h_n'(0)=h'(z_0),\\&\lim_{n\to\infty}t_n^2u_n'(0)=u'(z_0),\\&\lim_{n\to\infty}t_n^2k_n(0)=k(z_0).\end{aligned}\right\}\quad(3.101)$$

取定一正数R，使当n充分大时，

$$z+z_n+t_nz_0\in D\qquad(|z|\leqslant R).$$

应用引理3.10于$\varphi_n(z)$，得

$$T(r,\varphi_n)<K\left\{C_n+\log^+R+\log^+\frac{1}{R}+\log^+\frac{R}{R-r}\right\}$$

$$(0<r<R),$$

其中

$$\begin{aligned}C_n=&\log^+|\varphi_n(0)|+\log^+\frac{1}{|u_n(0)|}+\log^+\frac{1}{|u_n'(0)|}\\&+\log^+\frac{1}{|u_n(0)-1|}+\log^+\left|\frac{u_n(0)-1}{u_n'(0)}\right|\\&+\log^+\frac{1}{|3h_n'(0)-2h_n(0)^2-12k_n(0)|}.\end{aligned}$$

由（3.100）及（3.101）式知C_n有界，故族$\{\varphi_n(z)\}$在$z=0$正规，也就有族$\{f_n(z)\}$在$z=0$正规。由此导出$g(z)$为常数，从

而矛盾。至此定理证毕。

以下我们同时来证明定理3.23与3.24.

定理3.23 设 $\{f(z)\}$ 为区域 D 内一全纯函数族，n 为一正整数，$n\geqslant 3$. 若族 $\{f(z)\}$ 中每个函数 $f(z)$ 在 D 内满足

$$f'-af^n\neq b\quad (a\neq 0),$$

则族 $\{f(z)\}$ 在 D 内正规.

定理3.24 设 $\{f(z)\}$ 为区域 D 内一亚纯函数族，n 为一正整数，$n\geqslant 5$. 若族 $\{f(z)\}$ 中每个函数 $f(z)$ 在 D 内满足

$$f'-af^n\neq b\quad (a\neq 0),$$

则族 $\{f(z)\}$ 在 D 内正规.

我们先建立两个引理（参看杨乐[23]）.

引理3.12 设 $f(z)$ 于 $|z|<R$ $(0<R\leqslant\infty)$ 内亚纯，b 为一有穷复数，$n\geqslant 5$ 为一正整数. 令 $\psi(z)=\dfrac{f'-b}{f^n}$. 若 $f(0)\neq 0$，∞，$\psi(0)\neq 0$，1，∞，$\psi'(0)\neq 0$，则对 $0<r<R$，有

$$\begin{aligned}(n-4)T(r,f)\leqslant\overline{N}\left(r,\frac{1}{\psi-1}\right)&+m\left(r,\frac{\psi'}{\psi-1}\right)\\&+m\left(r,\frac{\psi'}{\psi}\right)+m\left(r,\frac{f'}{f}\right)\\&+\frac{1}{n}\log\frac{1}{|f(0)|}+\log\left|\frac{\psi(0)-1}{\psi'(0)}\right|\\&+\log^+|b|+2\log 2.\end{aligned}\tag{3.102}$$

特别地，若 f 为全纯函数，$n\geqslant 3$，则有

$$\begin{aligned}(n-2)T(r,f)\leqslant\overline{N}\left(r,\frac{1}{\psi-1}\right)&+m\left(r,\frac{\psi'}{\psi-1}\right)\\&+m\left(r,\frac{\psi'}{\psi}\right)+m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+\frac{1}{n}\log\frac{1}{|f(0)|}\end{aligned}$$

$$+\log\left|\frac{\psi(0)-1}{\psi'(0)}\right|+\log^{+}|b|+2\log 2. \qquad (3.103)$$

证明 首先引进几个记号. 以$n_0(r)$表示在$|z|\leqslant r$上$f'(z)-b$的零点但不是$f(z)$的零点的数目; 以$n_1(r)$表示在$|z|\leqslant r$上$f'(z)-b$的零点同时又是$f(z)$的零点与$\psi(z)$的极点的数目; 以$n_2(r)$表示在$|z|\leqslant r$上$f'(z)-b$的零点同时又是$f(z)$的零点与$\psi(z)$的零点的数目. 以上各项均按照它们在$f'(z)-b$内的零点重数计算次数. 又以$N_0(r)$, $N_1(r)$及$N_2(r)$分别表示$n_0(r)$, $n_1(r)$, 及$n_2(r)$的密指量. 不难看出,

$$(n-2)N(r,f)+N_0(r)\leqslant N\left(r,\frac{1}{\psi}\right). \qquad (3.104)$$

另外,

$$\begin{aligned}nm(r,f)=m(r,f^n)&\leqslant m\left(r,\frac{1}{\psi}\right)+m(r,f'-b)\\&\leqslant T(r,\psi)-N\left(r,\frac{1}{\psi}\right)+\log\frac{1}{|\psi(0)|}\\&\quad+m(r,f')+\log^{+}|b|+\log 2\\&\leqslant T(r,\psi)-N\left(r,\frac{1}{\psi}\right)+\log\frac{1}{|\psi(0)|}\\&\quad+m(r,f)+m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+\log^{+}|b|+\log 2.\end{aligned}$$

$$(3.105)$$

由(3.104)及(3.105)式, 有

$$\begin{aligned}(n-2)T(r,f)\leqslant T(r,\psi)-N_0(r)&+\log\frac{1}{|\psi(0)|}\\&+m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+\log^{+}|b|+\log 2.\end{aligned}$$

(3.106)

再应用第二基本定理于$\psi(z)$，得

$$T(r,\psi)\leqslant\overline{N}(r,\psi)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{\psi}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{\psi-1}\right)$$

$$+m\left(r,\frac{\psi'}{\psi}\right)+m\left(r,\frac{\psi'}{\psi-1}\right)$$

$$+\log\left|\frac{\psi(0)(\psi(0)-1)}{\psi'(0)}\right|+\log 2. \tag{3.107}$$

上式右端的项$\overline{N}\left(r,\frac{1}{\psi}\right)$有如下估计：

$$(n-2)\overline{N}\left(r,\frac{1}{\psi}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{\psi}\right)$$

$$+(n-3)N_0(r)+\frac{n-2}{n}N_2(r). \tag{3.108}$$

事实上，若z_0为$f(z)$的极点，则它是$\psi(z)$的零点，其重数$\geqslant n-2$. 若z_0为$f'(z)-b$的零点而不是$f(z)$的零点，则在$n\left(r,\frac{1}{\psi}\right)$内至少可计算一次，在$n_0(r)$中也至少可计算一次. 若$z_0$为$f'(z)-b$的零点，同时又是$f(z)$的零点与$\psi(z)$的零点，则$f'(z)-b$必以$z_0$为重数大于$n$的零点. 除去上述三种情形，$\psi(z)$无其他零点. 因而(3.108)式成立.

另外，不难看出，

$$n\overline{N}(r,\psi)\leqslant N(r,\psi)+N_1(r). \tag{3.109}$$

把(3.108)及(3.109)式代入(3.107)式，有

$$\left(1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n-2}\right)T(r,\psi)\leqslant\overline{N}\left(r,\frac{1}{\psi-1}\right)+\left(1-\frac{1}{n-2}\right)N_0(r)$$

$$+\frac{1}{n}\{N_1(r)+N_2(r)\}$$

$$+\frac{1}{n-2}\log\frac{1}{|\psi(0)|}+m\left(r,\frac{\psi'}{\psi}\right)$$

$$+m\left(r,\frac{\psi'}{\psi-1}\right)+\log\left|\frac{\psi(0)(\psi(0)-1)}{\psi'(0)}\right|+\log 2.$$

$$(3.110)$$

由（3.106）与（3.110）式，得

$$(n-2)\left(1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n-2}\right)T(r,f)$$

$$\leqslant\overline{N}\left(r,\frac{1}{\psi-1}\right)+\frac{1}{n}\{N_0(r)+N_1(r)-N_2(r)\}$$

$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\log\frac{1}{|\psi(0)|}+m\left(r,\frac{\psi'}{\psi-1}\right)$$

$$+\log\left|\frac{\psi(0)(\psi(0)-1)}{\psi'(0)}\right|+\left(1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n-2}\right)$$

$$\times(\log^+|b|+\log 2)+\log 2. \qquad (3.111)$$

再计及

$$N_0(r)+N_1(r)+N_2(r)\leqslant N\left(r,\frac{1}{f'-b}\right)\leqslant T(r,f')+\log^+|b|$$

$$+\log 2+\log\frac{1}{|f'(0)-b|}\leqslant 2T(r,f)$$

$$+m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+\log^+|b|+\log 2$$

$$+\log\frac{1}{|f'(0)-b|}, \qquad (3.112)$$

即得（3.102）式.

当 $f(z)$ 为全纯函数时，完全仿照上述证明步骤，只是把其中（3.104），（3.108）及（3.112）分别改为

$$N_0(r)\leqslant N\left(r,\frac{1}{\psi}\right),$$

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{\psi}\right)\leqslant N_0(r)+\frac{1}{n}N_2(r),$$

$$N_0(r)+N_1(r)+N_2(r)\leqslant T(r,f)+m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+\log^+|b|$$

$$+\log 2+\log\frac{1}{|f'(0)-b|},$$

就得（3.103）式.

引理3.13 设 $f(z)$ 于 $|z|<R(0<R<\infty)$ 亚纯（全纯），b 为一有穷复数，n 为正整数且 $n\geqslant 5$（$n\geqslant 3$）. 若 $f(0)\neq 0$，∞，$\psi(0)\neq 0$，1，∞，$\psi'(0)\neq 0$，则对 $0<r<R$，有

$$T(r,f)<K\left\{1+\log^+\frac{1}{R}+\log^+R+\log\frac{R}{R-r}+N\left(r,\frac{1}{\psi-1}\right)\right.$$

$$+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+\log^+\frac{1}{|f'(0)-b|}$$

$$+\log^+\frac{1}{|f'(0)-b-f(0)^n|}$$

$$\left.+\log^+\left|\frac{\psi(0)-1}{\psi'(0)}\right|+\log^+|b|\right\}. \qquad (3.113)$$

证明 根据定理1.13，对于$0<r<\rho'<\rho<R$，$\rho'=\dfrac{r+\rho}{2}$，有

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)<K\left\{1+\log^+\rho+\log^+\frac{1}{r}+\log^+\frac{1}{\rho-r}\right.$$

$$\left.+\log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|}+\log^+T(\rho,f)\right\}, \tag{3.114}$$

$$m\left(r,\frac{\psi'}{\psi-1}\right)+m\left(r,\frac{\psi'}{\psi}\right)\leqslant m\left(r,\frac{(f'-b-f^n)'}{f'-b-f^n}\right)$$

$$+m\left(r,\frac{f''}{f'-b}\right)+2m\left(r,\frac{f'}{f}\right)$$

$$<2m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+K\left\{1+\log^+\rho'\right.$$

$$+\log^+\frac{1}{r}+\log^+\frac{1}{\rho'-r}$$

$$+\log^+\log^+\frac{1}{|f'(0)-b|}$$

$$+\log^+\log^+\frac{1}{|f'(0)-b-f(0)^n|}$$

$$+\log^+|b|+\log^+T(\rho',f')$$

$$\left.+\log^+T(\rho',f)\right\} \tag{3.115}$$

而

$$T(\rho',f')\leqslant 2T(\rho',f)+m\left(\rho',\frac{f'}{f}\right)$$

$$<2T(\rho',f)+K\left\{1+\log^+\rho+\log^+\frac{1}{\rho'}+\log^+\frac{1}{\rho-\rho'}\right.$$

$$\left.+\log^+\log^+|f(0)|+\log^+T(\rho,f)\right\}. \tag{3.116}$$

于是，应用（3.102）式或（3.103）式并结合(3.114)，(3.115)及（3.116）式即得（3.113）式．至此引理证毕．

显然，从（3.113）式出发，我们可把定理 3.23 与定理3.24统一加以证明．首先通过变形

$$f' - af^n = \frac{1}{a^{\frac{1}{n-1}}}\{(a^{\frac{1}{n-1}}f)' - (a^{\frac{1}{n-1}}f)^n\},$$

不妨设 $a=1$．假定亚纯（或全纯）函数族 $\{f(z)\}$ 在某点 $z_0\in D$ 不正规．不妨设 $z_0=0$，那么根据定理 3.21，族 $\{f(z)\}$ 中存在一序列 $f_k(z)$，以及点列 z_k 和正数列 t_k $(k=1,2,\cdots)$，使序列 $f(z_k+t_kz)$ 在开平面上内闭一致收敛于亚纯函族（或整函数）$F(z)$，且 $F'(z)\not\equiv 0$ 及 $t_k\to 0$，$z_k\to 0$ $(k\to\infty)$．按 f_k 的取法及 $F'(z)\not\equiv 0$，可找到一点 ζ_0 使

$$F(\zeta_0)\neq 0,\quad F'(\zeta_0)\neq 0,\quad n(F'(\zeta_0))^2 - F''(\zeta_0)F(\zeta_0)\neq 0,$$

且当 k 充分大时，

$$f_k(z_k+t_k\zeta_0)\neq 0,$$

$$f_k'(z_k+t_k\zeta_0)-b\neq 0,$$

$$f_k'(z_k+t_k\zeta_0)-b-f_k(z_k+t_k\zeta_0)^n\neq 0.$$

命
$$h_k(z)=f_k(z+z_k+t_k\zeta_0),$$
$$a_k=z_k+t_k\zeta_0.$$

适当取定正数 R 使当 k 充分大时，只要 $|z|\leqslant R$ 就有 $z+z_k+t_k\zeta_0\in D$．应用引理3.13于 $h_k(z)$，得

$$T(r,h_k)<K\left\{C_k+\log\frac{2R}{R-r}\right\}\qquad (0<r<R),$$

其中

$$C_k = 1 + \log^+|b| + \log^+\frac{1}{R} + \log^+ R + \log^+\frac{1}{|f_k(a_k)|}$$

$$+ \log^+\frac{1}{|f_k'(a_k) - b|} + \log^+\frac{1}{|f_k'(a_k) - b - f_k(a_k)^n|}$$

$$+ \log^+\left|\frac{f_k(a_k)(f_k(a_k) - b - f_k(a_k)^n)}{f_k''(a_k)f_k(a_k) - n(f_k'(a_k))^2 + bnf_k'(a_k)}\right|.$$

再计及

$$\lim_{k\to\infty} f_k(z_k + t_k z) = F(z),$$

$$\lim_{k\to\infty} t_k f_k'(z_k + t_k z) = F'(z),$$

$$\lim_{k\to\infty} t_k^2 f_k''(z_k + t_k z) = F''(z),$$

而有

$$\lim_{k\to\infty} C_k = 1 + \log^+|b| + \log^+\frac{1}{R} + \log^+ R + \log^+\frac{1}{|F(\zeta_0)|}.$$

这表明函数序列 $\{h_k(z)\}$ 在 $z=0$ 正规，也就有 $\{f_k(z)\}$ 在点 $z=0$ 正规．由此立即导出 $F(z)$ 恒为常数，从而矛盾．于是就证明了定理3.23与定理3.24．

杨乐[2]、李松鹰与谢晖春[1]还先后把定理3.24的条件 $f' - af^n \neq b$ 中的 f' 改为较一般的微分多项式的情形．有兴趣的读者请参阅他们的文章．

下面，我们给出 Zalcman 的正规定则及被推广了的正规定则．

我们用记号 $\langle f, G\rangle$ 表示 G 为一区域，而 f 在 G 内亚纯．

定理3.25　设集合 $P = \{\langle f, G\rangle\}$ 具有下列性质：

i) 若$\langle f,D\rangle\in P$及区域$D'\subset D$，则$\langle f, D'\rangle\in P$，

ii) 若$\langle f,D\rangle\in P$，$\varphi(z)=az+b$ ($a\neq 0$)，则$\langle f\circ\varphi, \varphi^{-1}(D)\rangle\in P$，

iii) 若$\langle f_n,D_n\rangle\in P$ ($n=1, 2, \cdots$)，$D_n\subset D_{n+1}$ ($n=1, 2,\cdots$) 且$\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$为开平面．又若$f_n$在开平面上内闭一致收敛于亚纯函数$f(z)$，则$f(z)$必为常数．

则对任一于某区域D内亚纯的函数族$\{f(z)\}$，只要族中每个f均满足$\langle f, D\rangle\in P$，那么$\{f(z)\}$在D内正规．

证明 假若族$\{f(z)\}$在D内不正规，则族$\{f(z)\}$必在某点$z_0\in D$不正规．于是，根据Zalcman引理（定理3.21），$\{f(z)\}$中存在一序列$f_n(z)$，使序列$f_n(z_n+t_nz)$在开平面上内闭一致收敛于非常数亚纯函数$g(z)$．由于$z_n\to z_0$，$t_n>0$，$t_n\to 0$ ($n\to\infty$) 及定理条件i) 与ii)，就存在一列以原点为心的圆D_n ($n=1,2,\cdots$)，使$D_n\subset D_{n+1}$ ($n=1,2,\cdots$)，$\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$为开平面，且$\langle g_n, D_n\rangle\in P$ ($n=1,2,\cdots$)，其中$g_n(z)=f_n(z_n+t_nz)$．于是，再由定理条件iii) 可知$g(z)$恒为常数，从而矛盾．定理即得证．

读者不难从上述Zalcman的正规定则立刻推出Montel基本定则（定理2.8）．

Bloch原理认为，如果具有某种性质N的一切于开平面上亚纯的函数必恒为常数，那么在一区域D内均具有性质N的任一亚纯函数族$\{f(z)\}$就在D内正规．而在应用Zalcman正规定则时，集合$P=\{\langle f,G\rangle\}$实质上表示f在G内具有某种性质N．

同时，为了使集合 P 满足 Zalcman 定则的条件 iii），Bloch 原理中所叙述的条件是极为重要的．因此，我们可以说，Zalcman 正规定则在某种意义下体现了 Bloch 原理．

庞学诚为了推广 Zalcman 正规定则，先把 Zalcman 引理加以推广．

定理3.26　设 $\{f(z)\}$ 为区域 D 内一亚纯函数族，δ：$-1<\delta<1$ 为任一实数．若族 $\{f(z)\}$ 在某点 $z_0\in D$ 不正规，则存在一列函数 $f_n(z)\in\{f(z)\}$，存在一点列 z_n 及一正数列 t_n，使函数序列 $t_n^{-\delta}f_n(z_n+t_nz)$ 在开平面上内闭一致收敛于非常数亚纯函数 $g(z)$，其中 $z_n\to z_0$，$t_n\to 0$ $(n\to\infty)$．

证明　不妨设 $z_0=0$．取定一正整数 n' 使圆 $(|z|\leqslant\frac{1}{n'})\subset D$．对每一正整数 $n(\geqslant n')$，根据 Marty 定则（定理3.11），存在函数 $f_n(z)\in\{f(z)\}$ 及点 z_n^*：$|z_n^*|<\frac{1}{2n}$ 使

$$\frac{|f_n'(z_n^*)|}{1+|f_n(z_n^*)|^2}>2^{|\delta|+1}\cdot n^{|\delta|+2}\qquad(n=n_1,n_1+1,\cdots).\tag{3.117}$$

置

$$S_n(\rho,z)=\frac{(1-n|z|)^{\delta+1}\rho^{\delta+1}|f_n'(z)|}{(1-n|z|)^{2\delta}\rho^{2\delta}+|f_n(z)|^2}.$$

显然，当 $0<\rho\leqslant 1$，$|z|<\frac{1}{n}$ 时，

$$(1-n|z|)^{1+|\delta|}\rho^{1+|\delta|}\frac{|f_n'(z)|}{1+|f_n(z)|^2}\leqslant S_n(\rho,z)$$

$$\leqslant(1-n|z|)^{1-|\delta|}\rho^{1-|\delta|}\frac{|f_n'(z)|}{1+|f_n(z)|^2}.$$

(3.118)

另外，$\sup\limits_{|z|<\frac{1}{n}} S_n(\rho,z)$作为$\rho$的函数在$0<\rho\leqslant 1$上连续，结合(3.117)与(3.118)式，有

$$\sup_{|z|<\frac{1}{n}} S_n(1,z)>1,\quad \sup_{|z|<\frac{1}{n}} S_n(\rho,z)<1\quad(\text{当}\ \rho\ \text{很小时}),$$

$$\sup_{|z|<\frac{1}{n}} S_n(\rho,z)=\max_{|z|<\frac{1}{n}} S_n(\rho,z).$$

于是，存在ρ_n：$0<\rho_n<1$及z_n：$|z_n|<\frac{1}{n}$，使

$$1=\sup_{|z|<\frac{1}{n}} S_n(\rho_n,z)=S_n(\rho_n,z_n).\qquad(3.119)$$

由(3.119)，(3.118)及(3.117)知

$$1\geqslant S_n(\rho_n,z_n^*)\geqslant(1-n|z_n^*|)^{1+|\delta|}\rho_n^{1+|\delta|}\frac{|f_n'(z_n^*)|}{1+|f_n(z_n^*)|^2}$$

$$>\rho_n^{1+|\delta|}n^{2+|\delta|}.$$

故

$$n\rho_n\longrightarrow 0\quad(n\to\infty).\qquad(3.120)$$

任意固定R，当$|\zeta|<R$，n充分大时，$z_n+t_n\zeta\in D$.

置

$$g_n(\zeta)=t_n^{-\delta}f_n(z_n+t_n\zeta),$$

$$t_n=(1-n|z_n|)\rho_n.$$

于是

$$\frac{|g'_n(\zeta)|}{1+|g_n(\zeta)|^2}=\frac{(1-n|z_n|)^{1+\delta}\rho_n^{1+\delta}|f_n'(z_n+t_n\zeta)|}{(1-n|z_n|)^{2\delta}\cdot\rho_n^{2\delta}+|f_n(z_n+t_n\zeta)|^2},$$

(3.121)

$$\frac{|g_n'(0)|}{1+|g_n(0)|^2}=1.\tag{3.122}$$

另外，计及

$$\frac{\frac{1}{n}-|z_n|}{t_n}=\frac{1}{n\rho_n}\to+\infty\quad(n\to+\infty),$$

就可知，当$|\zeta|<R$，n充分大时，

$$1-n|z_n+t_n\zeta|>0.\tag{3.123}$$

我们再置

$$\varepsilon_n=\left|1-\frac{1-n|z_n+t_n\zeta|}{1-n|z_n|}\right|,$$

不难看出，因

$$0\leqslant\varepsilon_n\leqslant\frac{nt_n|\zeta|}{1-n|z_n|}\leqslant Rn\rho_n,$$

而有$\varepsilon_n\to0$，且

$$(1-\varepsilon_n)(1-n|z_n|)\leqslant1-n|z_n+t_n\zeta|\leqslant(1+\varepsilon_n)(1-n|z_n|).$$

(3.124)

故由（3.121），（3.124）及（3.119）式可知，当$|\zeta|<R$，n充分大时，

$$\frac{|g_n'(\zeta)|}{1+|g_n(\zeta)|^2}\leqslant\left(\frac{1+\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n}\right)^{1+|\delta|}.$$

于是，应用Marty定则，函数族$\{g_n(\zeta)\}$就在$|\zeta|<R$内正规．由R的任意性及（3.122）式就知，从$\{g_n(z)\}$中可选出一子列，不妨仍设为$\{g_n(z)\}$在开平面上内闭一致收敛于非常数亚纯函数．至此定理证毕．

由上述定理可获得如下正规定则．

定理3.27　设集合$P=\{\langle f,G\rangle\}$具有下列性质：

i)　若$\langle f,D\rangle\in P$，任一区域$D'\subset D$，则$\langle f,D'\rangle\in P$．

ii)　存在一实数δ：$-1<\delta<1$，使对任一$\langle f,D\rangle\in P$及任一$\varphi(z)=az+b$（$a\neq 0$），总有$\langle\frac{f\circ\varphi}{a^\delta},\ \varphi^{-1}(D)\rangle\in P$．

iii)　若$\langle f_n,D_n\rangle\in P$（$n=1,2,\cdots$），$D_n\subset D_{n+1}$（$n=1,2,\cdots$），$\bigcup\limits_1^\infty D_n$为开平面．又若$f_n$在开平面上内闭一致收敛于亚纯函数$f(z)$，则$f(z)$必为常数．

则对任一于某区域D内亚纯的函数族$\{f(z)\}$，只要族$\{f(z)\}$中每个f均满足$\langle f,D\rangle\in P$，那么$\{f(z)\}$在D内正规．

证明　假若族$\{f(z)\}$在D内不正规，则$\{f(z)\}$必在某点$z_0\in D$不正规．于是根据定理3.26，族$\{f(z)\}$中存在一序列$f_n(z)$，使序列$g_n(z)=t_n^{-\delta}f(z_n+t_nz)$在开平面上内闭一致收敛于非常数亚纯函数$g(z)$，其中$z_n\to z_0$，$t_n\to 0^+$．再由定理条件i)和ii)知，存在一列以$z_0$为心的圆域$D_n$（$n=1,2,\cdots$），$D_n\subset D_{n+1}$，$\bigcup\limits_1^\infty D_n$为开平面，使$\langle g_n,D_n\rangle\in P$（$n=1,2,\cdots$）．于是

由定理条件iii）可知 g 为常数．从而矛盾．定理得证．

对于上述正规定则，若取 $\delta=0$ 即为 Zalcman 的正规定则（定理3.25）．

Hayman[2]曾有如下猜测 A：设 $f(z)$ 为开平面上的亚纯函数，n 为任一正整数．若在开平面上恒有

$$f'(z)f(z)^n \neq 1,$$

则 $f(z)$ 必为常数．

由 Bloch 原理，相应地可提出如下正规性的问题：设 $\{f(z)\}$ 为某区域 D 内一亚纯函数族，n 为任一正整数．若族 $\{f(z)\}$ 中每个 $f(z)$ 在 D 内满足

$$f'(z)f(z)^n \neq 1,$$

则族 $\{f(z)\}$ 在 D 内正规．当 $n \geqslant 3$ 时，问题已被我们解决（见定理3.20）．

上述 Hayman 的猜测 A，当 $n=2$ 时已被Mues[1]所证实，庞学诚根据定理3.27并结合 Mues 的结果，证明了相应的正规定则当 $n=2$ 时也成立．这就是下述定理．

定理3.28　设 $\{f(z)\}$ 为区域 D 内一亚纯函数族．若族中每个 $f(z)$ 在 D 内均满足

$$f'(z)f(z)^2 \neq 1,$$

则族 $\{f(z)\}$ 在 D 内正规．

证明　作集

$$P=\{\langle f,G\rangle;\ f'f^2 \neq 1\ (z\in G)\}.$$

显然，P 满足定理3.27的条件 i）与 ii），其中取 $\delta=\frac{1}{3}$．现在来验证 P 满足定理3.27的条件 iii）．设 $\langle f_n,D_n\rangle\in P, D_n\subset D_{n+1}$，

$(n=1,2,\cdots,)$，$\bigcup\limits_{1}^{\infty} D_n$为开平面且函数列 $f_n(z)$在开平面上内闭一致收敛于亚纯函数 $f(z)$．因 $f_n'(z)f_n(z)^2$ 也在开平面上内闭一致收敛于 $f'(z)f(z)^2$，所以或者 $f'(z)f(z)^2\equiv 1$或者$f'(z)f(z)^2\neq 1$．若 $f'(z)f(z)^2\equiv 1$，即$\left(\frac{1}{3}f(z)^3\right)'\equiv 1$，那么$f^3(z)\equiv 3(z+C)$（$C$为一常数），而这是不可能的．故在开平面上就有 $f'(z)f(z)^2\neq 1$．再由 Mues 的结果可推出 $f(z)$为常数．最后应用定理3.27可知，族 $\{f(z)\}$ 在 D 内正规．

从上面的讨论我们还可看到，如果上述 Hayman 猜想A，当$n=1$时也被证实，那么定理3.27就使相应的正规性问题获得解决．

第四章　奇异方向

§4.1.　预 备 定 理

本节介绍关于 Borel 方向的一些基本性质. 在这里除Boutroux-Cartan 定理外，其余性质我们只叙述而不证明. 读者如需了解这方面的详细内容，请参阅庄圻泰[3]和杨乐[1].

首先，我们给出奇异方向存在性研究中常用的 Boutroux-Cartan定理（见H. Cartan[2]）.

定理4.1. 设 $P(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)$ 为一多项式，其中 $z_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为复数. 设 H 为任一正数，则存在有穷个圆 Γ_j：$|z-a_j|<r_j$ $(j=1,2,\cdots,m)$，它们的个数 $m\leqslant n$ 且满足

1） $\sum_{j=1}^{m} r_j\leqslant 2H$，

2） 当 $z\overline{\in}\bigcup_{j=1}^{m}$ 时，$|P(z)|>\left(\frac{H}{e}\right)^n$.

证明 先证下列事实：

1° 设λ为一正整数. 若存在一圆 C，以 $\lambda\frac{H}{n}$ 为半径且包含 E 中的点的个数 $\geqslant\lambda$，其中 $E=\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}$，则必存在一正整

数 $\lambda'\geqslant\lambda$ 及一圆 C'，以 $\lambda'\frac{H}{n}$ 为半径且恰好包含 E 中 λ' 个点.

事实上，假定这样的 λ' 及 C' 不存在. 设 p_0 为圆 C 包含 E 中的点的个数，于是 $p_0>\lambda$. 作 C 的同心圆 C_1，以 $p_0\frac{H}{n}$ 为半径，并设 C_1 包含 E 中 p_1 个点，于是 $p_1>p_0$. 再作 C_1 的同心圆 C_2，以 $p_1\frac{H}{n}$ 为半径，并设 C_2 包含 E 中 p_2 个点，同理，$p_2>p_1$. 如此继续下去就会得一个圆它包含 E 中的点的个数大于 n，从而矛盾.

由于以 z_1 为心并以 $\frac{H}{n}$ 为半径的圆满足1°中的条件，故根据1°存在一正整数 λ' 及一圆 C' 以 $\lambda'\frac{H}{n}$ 为半径并且恰好包含 E 中 λ' 个点. 设 λ_1 是这样的正整数 λ' 中的最大者，对应的圆为 C_1. C_1 以 $\lambda_1\frac{H}{n}$ 为半径并且恰好包含 E 中 λ_1 个点. 这 λ_1 个点所成的点集以 S_1 表示.

令 $E_1=E-S_1$. 若 E_1 非空，则同理存在一正整数 λ' 及一圆 C'，以 $\lambda'\frac{H}{n}$ 为半径并且恰好包含 E_1 中 λ' 个点. 设 λ_2 是这样的正整数 λ' 中的最大者，对应的圆为 C_2. C_2 以 $\lambda_2\frac{H}{n}$ 为半径并且恰好包含 E_1 中 λ_2 个点. 这 λ_2 个点所成的点集以 S_2 表示. 如此继续下去就得到 (λ_j, C_j, S_j) $(j=1, \cdots, m)$ 使

$$m\leqslant n,\quad \sum_{j=1}^{m}\lambda_j=n,\quad E=\bigcup_{j=1}^{m}S_j.$$

另外，根据 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 的取法，还有

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_m.$$

现在证下列事实：

2° 设 λ 为一正整数，并设 C 为一圆，其半径为 $\lambda \frac{H}{n}$. 假定 C 包含 E 中的点的个数 $\gamma \geqslant \lambda$，则存在一点 $z_k \in E$ 及一正整数 j $(1 \leqslant j \leqslant m)$，使

$$z_k \in C, \quad z_k \in S_j, \quad \lambda_j \geqslant \lambda.$$

事实上，根据1°，显然 $\lambda_1 \geqslant \lambda$. 我们区分两种情形：

a) $\lambda_m \geqslant \lambda$. 此时，任取 $E \cap C$ 中一点 z_k 及 z_k 所属的 S_j 即可.

b) $\lambda_m < \lambda$. 此时，设 $\lambda_p \geqslant \lambda > \lambda_{p+1}$. 以 S 表示 C 包含的 E 中 γ 个点所成的集合. 我们指出下式不成立：

$$S \subset E - \bigcup_{j=1}^{p} S_j.$$

因为如果这个关系式成立，那么根据1°应有 $\lambda_{p+1} \geqslant \lambda$，从而矛盾. 故存在一点 z_k 满足：

$$z_k \in S, \quad z_k \in \bigcup_{j=1}^{p} S_j.$$

设 $z_k \in S_j$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$，于是 z_k 及 j 即满足要求.

令 Γ_j $(j=1,2,\cdots m)$ 分别为 C_j $(j=1,2,\cdots,m)$ 的同心圆，其半径为 C_j 半径的两倍即 $2\lambda_j \frac{H}{n}$. 我们再证下列事实：

3° 设 λ 为一正整数，并设 C 为一圆，其半径为 $\lambda \frac{H}{n}$. 假定 C 的圆心 $a \overline{\in} \bigcup_{j=1}^{m} \Gamma_j$，则 C 最多包含 E 中 $\lambda-1$ 个点.

事实上，若 C 包含 E 中的点的个数 $\geqslant \lambda$，根据2°，存在一点 z_k

$\in E$ 及一正整数 j ($1\leqslant j\leqslant m$) 满足

$$2\lambda_j\frac{H}{n}\leqslant|a-a_j|\leqslant|a-z_k|+|z_k-a_j|<\lambda\frac{H}{n}+\lambda_j\frac{H}{n},$$

其中 a_j 为 C_j 的圆心. 由此得 $\lambda_j<\lambda$，从而矛盾.

我们任取一点 $z\overline{\in}\bigcup_{j=1}^{m}\Gamma_j$. 重新排列$E$中的点的次序：$z_1'$, z_2', $\cdots$, z_n'使

$$\left|z-z_1'\right|\leqslant\left|z-z_2'\right|\leqslant\cdots\leqslant\left|z-z_n'\right|.$$

设C为以z为心，以$\frac{H}{n}$为半径的圆. 根据3°，C 不包含 E 中的点，故有

$$\left|z-z_1'\right|\geqslant\frac{H}{n}.$$

同样，考虑以z为心，以$2\frac{H}{n}$为半径的圆，根据3°，此圆最多包含点 z_1'，故有

$$\left|z-z_2'\right|\geqslant2\frac{H}{n}.$$

一般地，有

$$\left|z-z_k'\right|\geqslant k\frac{H}{n}\qquad(1\leqslant k\leqslant n)\,.\qquad(4.1)$$

故有

$$\left|P(z)\right|\geqslant n!\left(\frac{H}{n}\right)^n>\left(\frac{H}{e}\right)^n.$$

至此定理证毕.

上述定理中的一组圆 Γ_j（$j=1,2,\cdots,m$; $m\leqslant n$）称为关于（z_1, $z_2\cdots$, z_n）及H的一组除外圆.

另外，由（4.1）式可知，当$z\overline{\in}\bigcup_{j=1}^{m}\Gamma_j$时，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|z-z_k|}\leqslant\frac{n}{H}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right),$$

于是，我们还有

定理4.1′ 设 z_k（$k=1,2,\cdots,n$）为 n 个复数. 又设H为任意一个正数，则存在有穷个圆 Γ_j：$|z-a_j|>r_j$（$j=1,2,\cdots,m$），它们的个数$m\leqslant n$且满足

1） $\sum_{j=1}^{m}r_j\leqslant 2H$，

2） 当 $z\overline{\in}\bigcup_{j=1}^{m}\Gamma_j$时，

$$\left|\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)\right|>\left(\frac{H}{e}\right)^n$$

及

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|z-z_k|}<\frac{n}{H}(2\log n+1). \tag{4.2}$$

对于有穷正级亚纯函数，G. Valiron[3]于1928年证明了奇异方向的存在性. 我们先介绍关于充满圆序列的存在性定理.

定理4.2 设$f(z)$为开平面上级为ρ（$0<\rho<+\infty$）的亚纯函数，则必存在一列圆

$$\Gamma_j:\ |z-z_j|<\varepsilon_j|z_j|\ (j=1,2,\cdots),$$

$$\lim_{j\to\infty}\varepsilon_j=0,\ \lim_{j\to\infty}|z_j|=\infty,$$

使 $f(z)$在每个Γ_j内取任意复数至少$|z_j|^{\rho-\delta_j}$次，至多除去一些复数可含于球面半径为$e^{-|z_j|^{\rho-\delta_j}}$的两个圆内，且$\lim\limits_{j\to\infty}\delta_j=0$.

Γ_j $(j=1,2,\cdots)$ 称为$f(z)$的一列 ρ 级充满圆.

由定理4.2 立即推得

定理4.3 设$f(z)$为开平面上级为 ρ $(0<\rho<+\infty)$ 的亚纯函数，则必存在一条由原点出发的半直线Δ：$\arg z=\theta_0$ $(0\leqslant\theta_0<2\pi)$，使得对于任意正数 ε 及任意 3 个互为判别的复数 a_j（有穷或无穷，$j=1,2,3$）均有

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log\left\{\sum\limits_{j=1}^{3}n(r,\theta_0,\varepsilon,f=a_j)\right\}}{\log r}=\rho.$$

这种方向Δ称为$f(z)$的ρ级 Borel 方向.

上面是由充满圆序列的存在性导出 Borel 方向的存在性. 反过来，A. Rauch[1]从 Borel 方向的存在性导出充满圆序列的存在性.

定理4.4 设$f(z)$为开平面上级为$\rho(0<\rho<+\infty)$ 的亚纯函数. 若Δ：$\arg z=\theta_0$ $(0\leqslant\theta_0<2\pi)$ 为$f(z)$的一条Borel方向，则必存在一列圆

$$\Gamma_j:\ |z-z_j|<\varepsilon_j|z_j|,\quad z_j=|z_j|e^{i\theta_0}\quad(j=1,2,\cdots)$$

$$\lim_{j\to\infty}|z_j|=\infty,\quad \lim_{j\to\infty}\varepsilon_j=0,$$

使$f(z)$在每个Γ_j内取任意复数至少$|z_j|^{\rho-\delta_j}$次，至多可能除去一些复数可含于球面半径为2^{-j}的两圆内，其中$\lim\limits_{j\to\infty}\delta_j=0$.

关于Borel方向，M. Biernacki[1]进一步建立了如下定理：

定理4.5 设$f(z)$为开平面上级为ρ $(0<\rho<+\infty)$ 的亚级函

数，则存在一条从原点出发的半直线 Δ: $\arg z=\theta_0$ $(0\leqslant\theta_0<2\pi)$，使对于级小于 ρ 的一切亚纯函数 $\varphi(z)$（包括有穷或无穷复常数）恒有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,\theta_0,\varepsilon,f=\varphi)}{\log r}=\rho,$$

至多除去两个例外的函数.

§4.2 奇异方向的存在性

我们知道，Borel 方向可看作是对应于 Montel 基本正规定则的一条奇异方向. 实际上，对于每个正规定则，我们都可提出相应的奇异方向是否存在的问题. 本节介绍国内近年来在这方面的主要工作.

我们首先介绍的结果是由杨乐[4]给出，后来作者[4]作了推广.

定理4.6 设 $f(z)$ 为 ρ $(0<\rho<+\infty)$ 级整函数，则存在一条由原点出发的半直线 Δ: $\arg z=\theta_0$ $(0\leqslant\theta_0<2\pi)$，使得对于任意正数 ε，一切有穷复数 a 及一切有穷非零复数 b，恒有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\{n_{(k-1)}(r,\theta_0,\varepsilon,f=a)+n_{(l-1)}(r,\theta_0,\varepsilon,f^{(m)}=b)\}}{\log r}$$

$$=\rho,$$

其中 m, k, l 为满足条件 $\frac{m+1}{k}+\frac{1}{l}<1$ 的任意 3 个正整数，

$n_{k)}(r,\theta_0,\varepsilon,f=a)$ 表示在区域 $(|z|\leqslant r)\cap(|\arg z-\theta_0|\leqslant\varepsilon)$ 上 $f(z)-a$ 的重级不超过 k 的零点数目.

在证定理 4.6 之前先证几个引理.

引理4.1 设$f(z)$于$|z|\leqslant R$亚纯, $f(0)\neq 0,\infty, f^{(m+1)}(0)\neq 0$, $f^{(m)}(0)-1\neq 0$. 若$\frac{m+1}{k}+\frac{1}{l}<1$, 则当$0<r<R$时,

$$T\left(r,\frac{1}{f}\right)<K\left\{\log^{+}\left|\frac{f(0)}{f^{(m)}(0)-1}\right|+\log^{+}\left|\frac{f^{(m)}(0)-1}{f^{(m+1)}(0)}\right|\right.$$

$$+N^{m+1)}_{k-1)}\left(R,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}_{l-1)}\left(R,\frac{1}{f^{(m)}-1}\right)$$

$$+\overline{N}(R,f)+\log^{+}\log^{+}|f(0)|+\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f(0)|}$$

$$+\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f^{(m)}(0)-1|}+\log\frac{R}{R-r}$$

$$\left.+\log^{+}R+\log^{+}\frac{1}{R}+1\right\}, \tag{4.3}$$

其中记号$N^{m)}_{k)}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$表示$n^{m)}_{k)}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$的密指量, 而

$n^{m)}_{k)}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$表示$|z|\leqslant r$上$f(z)-a$的零点按如下方法计算 个数: 当零点重级不超过$m$时, 按其重数计算; 当零点重级大于$m$但不超过$k$时, 则计算$m$次; 重级大于$k$的零点则不计算. 另外, $\overline{N}_{k)}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$即为$N^{1)}_{k)}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$.

证明 由恒等式

$$\frac{1}{f}=\frac{f^{(m)}}{f}-\frac{f^{(m)}-1}{f^{(m+1)}}\cdot\frac{f^{(m)}}{f}$$

得

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)\leqslant m\left(r,\frac{f^{(m)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(m)}}{f}\right)$$

$$+m\left(r,\frac{f^{(m)}-1}{f^{(m+1)}}\right)+\log 2 .$$

根据Jensen公式（1.19），就有

$$T\left(r,\frac{1}{f}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{f}\right)-N\left(r,\frac{f^{(m)}-1}{f^{(m+1)}}\right)$$

$$+N\left(r,\frac{f^{(m+1)}}{f^{(m)}-1}\right)+m\left(r,\frac{f^{(m)}}{f}\right)$$

$$+m\left(r,\frac{f^{(m+1)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(m+1)}}{f^{(m)}-1}\right)$$

$$+\log\left|\frac{f^{(m)}(0)-1}{f^{(m)}(0)}\right|+\log 2. \qquad (4.4)$$

应用定理1.13′，当$0<r<\rho<R$时，有

$$m\left(r,\frac{f^{(m)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(m+1)}}{f}\right)$$

$$<K\left\{\log^{+}T(\rho,f)+\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f(0)|}\right.$$

$$\left.+\log^{+}\frac{1}{\rho-r}+\log^{+}\frac{1}{r}+\log^{+}\rho+1\right\}$$

$$(4.5)$$

应用定理1.13于 $m\left(r,\frac{f^{(m+1)}}{f^{(m)}-1}\right)$，并取$0<r<\frac{r+\rho}{2}$，同时注意到

$$T\left(\frac{r+\rho}{2},f^{(m)}\right)\leqslant m\left(\frac{r+\rho}{2},\frac{f^{(m)}}{f}\right)$$

$$+(m+1)T\left(\frac{r+\rho}{2},f\right),$$

再应用定理1.13′ 于 $m\left(\frac{r+\rho}{2},\frac{f^{(m)}}{f}\right)$，并取 $0<\frac{r+\rho}{2}<\rho<$

R 就得

$$m\left(r,\frac{f^{(m+1)}}{f^{(m)}-1}\right)<K\left\{\log^{+}T(\rho,f)+\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f^{(m)}(0)-1|}\right.$$

$$+\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f(0)|}+\log^{+}\frac{1}{\rho-r}$$

$$\left.+\log^{+}\frac{1}{r}+\log^{+}\rho+1\right\}. \qquad (4.6)$$

另外，

$$N\left(r,\frac{f^{(m+1)}}{f^{(m)}-1}\right)=\overline{N}(r,f)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(m)}-1}\right)$$

$$\leqslant\overline{N}(r,f)+\overline{N}_{l-1)}\left(r,\frac{1}{f^{(m)}-1}\right)+\frac{1}{l}N\left(r,\frac{1}{f^{(m)}-1}\right)$$

$$\leqslant\overline{N}(r,f)+\overline{N}_{l-1)}\left(r,\frac{1}{f^{(m)}-1}\right)$$

$$+\frac{1}{l}\left\{T(r,f^{(m)})+\log\frac{1}{|f^{(m)}(0)-1|}+\log 2\right\}$$

$$\leqslant\overline{N}(r,f)+\overline{N}_{l-1)}\left(r,\frac{1}{f^{(m)}-1}\right)+\frac{1}{l}\left\{T\left(r,\frac{1}{f}\right)\right.$$

$$+m\overline{N}(r,f)+m\left(r,\frac{f^{(m)}}{f}\right)+\log\left|\frac{f(0)}{f^{(m)}(0)-1}\right|$$

$$\left.+\log 2\right\}, \qquad (4.7)$$

$$N\left(r,\frac{1}{f}\right)-N\left(r,\frac{f^{(m)}-1}{f^{(m+1)}}\right)\leqslant N^{m+1)}\left(r,\frac{1}{f}\right)$$

$$\leqslant N^{m+1)}_{k-1)}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\frac{m+1}{k}N\left(r,\frac{1}{f}\right)$$

$$\leqslant N^{m+1)}_{k-1)}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\frac{m+1}{k}T\left(r,\frac{1}{f}\right). \qquad (4.8)$$

由(4.4)～(4.8)式，再应用引理2.5，并顾及 $T(r,f)\leqslant T\left(\frac{1}{2},f\right)\left(0<r<\frac{1}{2}\right)$，就得(4.3)式.

引理4.2 设函数$f(z)$于$|z|\leqslant 1$全纯. 又设m，k，l为三个正整数，且满足

$$\frac{m+1}{k}+\frac{1}{l}<1.$$

若

$$n_{(k-1)}\left(1,\frac{1}{f}\right)+n_{(l-1)}\left(1,\frac{1}{f^{(m)}-1}\right)\leqslant N, \tag{4.9}$$

则或者对任一复数a，有

$$n\left(\frac{1}{240},\frac{1}{f-a}\right)<K\left\{1+\log\frac{1}{|f(0),a|}\right\}, \tag{4.10}$$

或者在$|z|<\frac{1}{5}$内存在两点ζ_1与ζ_2，它们到$f(z)$在$|z|<1$内的任一零点的距离都大于$10^{-3}\left\{n\left(1,\frac{1}{f}\right)+1\right\}^{-1}$，到$f^{(m)}(z)-1$在$|z|<1$内任一零点的距离都大于$10^{-3}\left\{n\left(1,\frac{1}{f^{(m)}-1}\right)+1\right\}^{-1}$，且对任一复数$a$有

$$n\left(\frac{1}{240},\frac{1}{f-a}\right)<K\left\{\log^+ n\left(1,\frac{1}{f}\right)+N\log(N+1)+1\right.$$

$$+\log\frac{1}{|f(\zeta_1),a|}+\log^+\log^+|f(\zeta_1)|$$

$$+\log^+\log^+\frac{1}{|f(\zeta_1)|}$$

$$+\log^+\log^+\frac{1}{|f^{(m)}(\zeta_1)-1|}$$

$$+\log^+\log^+\frac{1}{|f(\zeta_2)|}\Bigg\}. \qquad (4.11)$$

证明 在圆$|z|\leqslant 1$上，以$f(z)$的每个重级小于k的零点和$f^{(m)}(z)-1$的每个重级小于l的零点为心，以$\{480(N+1)\}^{-1}$为直径作小圆，其全体记为$(\gamma)_1$. 再以$f(z)$的每个零点为心，以$\left\{960\left[n\left(1,\frac{1}{f}\right)+1\right]\right\}^{-1}$为直径作小圆，其全体记为$(\gamma)_2$. 以$f^{(m)}(z)-1$的每个零点为心，以$\left\{960\left[n\left(1,\frac{1}{f^{(m)}-1}\right)+1\right]\right\}^{-1}$为直径作小圆，其全体记为$(\gamma)_3$. 令

$$(\gamma)=(\gamma)_1+(\gamma)_2+(\gamma)_3,$$

显然，(γ)的所有圆的直径总和小于$\frac{1}{240}$.

适当取定ρ_0：$\frac{1}{120}\leqslant\rho_0\leqslant\frac{1}{60}$，使$(|z|=\rho_0)\cap(\gamma)=\phi$. 若在$|z|=\rho_0$上恒有$|f(z)|\leqslant 1$，则$T(\rho_0,f)=m(\rho_0,f)=0$. 从而当$a\neq f(0)$时，有

$$n\left(\frac{1}{240},\frac{1}{f-a}\right)\leqslant\frac{1}{\log 2}N\left(\rho_0,\frac{1}{f-a}\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{\log 2}\Bigg\{T(\rho_0,f)+\log^+|a|+\log 2$$

$$+\log\frac{1}{|f(0)-a|}\Bigg\}$$

$$\leqslant\frac{2}{\log 2}\left\{\log 2+\log\frac{1}{|f(0),a|}\right\}. \qquad (4.12)$$

现假定在圆$|z|=\rho_0$上存在使$|f(z)|>1$的点．我们取点z_0：$|z_0|=\rho_0$且

$$|f(z_0)|=\max_{|z|=\rho_0}|f(z)|.$$

显然$|f(z_0)|>1$．再取ρ^*使$\frac{1}{8}\leqslant\rho^*\leqslant\frac{1}{7}$且圆$|z-z_0|=\rho^*$与$(\gamma)$不相交．在圆$|z-z_0|=\rho^*$上取点$z^*$使

$$|f(z^*)|=\max_{|z-z_0|=\rho^*}|f(z)|.$$

用直线段连接点z_0与z^*，遇到(γ)中的圆时，则以相应的弧段代替相交部分，这样得一曲线L．容易算得L的长度小于$\frac{1}{6}$，L上任一点ζ满足$|\zeta-z_0|<\frac{1}{6}$及$|\zeta|<\frac{1}{5}$，且若以ζ为心，则还有

$$\left(|z|\leqslant\frac{1}{9}\right)\subset\left(|z-\zeta|<\frac{1}{3}\right),\quad\left(|z|<\frac{3}{4}\right)\supset\left(|z-\zeta|\leqslant\frac{1}{2}\right).\tag{4.13}$$

我们区分两种情形：

（1）
$$\left|\frac{f(z_0)}{f^{(m)}(z_0)-1}\right|\leqslant 1.\tag{4.14}$$

这时又区分两种情形：

（1.1）
$$\left|\frac{f^{(m+1)}(z_0)}{f^{(m)}(z_0)-1}\right|\geqslant 1.$$

应用引理4.1，取$R=\frac{1}{2}$，$r=\frac{5}{12}$，并注意到因$z_0\overline{\in}(\gamma)$，而有

$$N_{l-1}^{(m+1)}\left(\frac{1}{2},\ z_0,\ \frac{1}{f}\right)+\overline{N}_{l-1}\left(\frac{1}{2},\ z_0,\ \frac{1}{f^{(m)}-1}\right)$$

$$\leqslant (m+1) N \log[480(N+1)],$$

就得

$$T\left(\frac{5}{12}, z_0, \frac{1}{f}\right) < K\left\{N\log(N+1)+1\right.$$

$$+\log^+\log^+|f(z_0)|$$

$$+\log^+\log^+\frac{1}{|f(z_0)|}$$

$$\left.+\log^+\log^+\frac{1}{|f^{(m)}(z_0)-1|}\right\}.$$

$$(4.15)$$

另外，当$a \neq f(z_0)$时，有

$$n\left(\frac{1}{3}, z_0, \frac{1}{f-a}\right) \leqslant \frac{1}{\log\frac{5}{4}} N\left(\frac{5}{12}, z_0, \frac{1}{f-a}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{\log\frac{5}{4}} T\left(\frac{5}{12}, z_0, \frac{1}{f-a}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{\log\frac{5}{4}}\left\{T\left(\frac{5}{12}, z_0, \frac{1}{f}\right)\right.$$

$$+\log|f(z_0)|+\log^+|a|+\log 2$$

$$\left.+\log\frac{1}{|f(z_0)-a|}\right\}.$$

再由（4.13）及（4.15），可得

$$n\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{f-a}\right) \leqslant n\left(\frac{1}{3}, z_0, \frac{1}{f-a}\right)$$

$$< K\left\{N\log(N+1)+1+\log\frac{1}{|f(z_0), a|}\right.$$

$$+\log^+\log^+|f(z_0)|+\log^+\log^+\frac{1}{|f(z_0)|}$$

$$\left.+\log^+\log^+\frac{1}{|f^{(m)}(z_0)-1|}\right\} \quad (4.16)$$

(1.2)
$$\left|\frac{f^{(m+1)}(z_0)}{f^{(m)}(z_0)-1}\right|<1.$$

再区分两种情形：

(1.2.1) 在L上恒有

$$\left|\frac{f^{(m+1)}(z)}{f^{(m)}(z)-1}\right|\leqslant 1.$$

对于函数$\left(\log(f^{(m)}(z)-1)\right)'$，沿着$L$积分，得

$$\left|\log\left(f^{(m)}(z)-1\right)-\log\left(f^{(m)}(z_0)-1\right)\right|<1.$$

由此，有

$$|f^{(m)}(z)|<e|f^{(m)}(z_0)|+e+1 \qquad (z\in L)$$

逐次沿L积分，就得

$$|f(z^*)|>K(1+|f(z_0)|+|f'(z_0)|+\cdots+|f^{(m)}(z_0)|) \quad (4.17)$$

因$|f(z_0)|>1$，而有

$$\frac{|f(z^*)|}{|f(z_0)|}<K\left(2+\left|\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right|+\cdots+\left|\frac{f^{(m)}(z_0)}{f(z_0)}\right|\right).$$

再根据z^*的取法，有

$$T\left(\rho^*, z_0, \frac{f}{|f(z_0)|}\right)<\sum_{i=1}^{m}\log^+\left|\frac{f^{(i)}(z_0)}{f(z_0)}\right|+K. \quad (4.18)$$

令

$$d=10^{-8}\left[n\left(1, \frac{1}{f}\right)+1\right]^{-1},$$

注意到$z_0 \overline{\in}(\gamma)_\varepsilon$而有

$$\log^+\left|\frac{f^{(i)}(z_0)}{f(z_0)}\right| \leqslant m\left(\frac{d}{2},\ z_0,\ \frac{f^{(i)}}{f}\right) \qquad (i=1,2,\cdots,m).$$

再应用定理1.13′，有

$$\log^+\left|\frac{f^{(i)}(z_0)}{f(z_0)}\right| < K\left\{1+\log\frac{1}{d}+\log^+T(d,z_0,f)\right\}. \tag{4.19}$$

因

$$T(d,z_0,f)\leqslant T(\rho^*,z_0,f)\leqslant T\left(\rho^*,\ z_0,\ \frac{f}{|f(z_0)|}\right) + \log^+|f(z_0)|,$$

再结合（4.18）和（4.19），就有

$$T\left(\rho^*,\ z_0,\ \frac{f}{f(z_0)}\right) < K\left\{1+\log\frac{1}{d} + \log^+T\left(\rho^*,z_0,\frac{f}{|f(z_0)|}\right) + \log^+\log^+|f(z_0)|\right\}. \tag{4.20}$$

顾及

$$\log^+T\left(\rho^*,\ z_0,\ \frac{f}{|f(z_0)|}\right)\leqslant\log^+\left\{\frac{1}{K}T\left(\rho^*,z_0,\frac{f}{f(z_0)}\right)\right\} + \log^+K \leqslant\frac{1}{2K}T\left(\rho^*,\ z_0,\ \frac{f}{|f(z_0)|}\right) + \log^+K,$$

即得

$$T\left(\rho^*,\ z_0,\ \frac{f}{|f(z_0)|}\right) < K\left\{1+\log^+n\left(1,\ \frac{1}{f}\right)\right.$$

$$+\log^+\log^+|f(z_0)|\Big\}.$$

因此.

$$T(\rho^*,z_0,f)<\log^+|f(z_0)|+K\Big\{1+\log^+n\Big(1,\frac{1}{f}\Big)$$

$$+\log^+\log^+|f(z_0)|\Big\}.$$

再注意到

$$\Big(|z|\leqslant\frac{1}{60}\Big)\subset\Big(|z-z_0|<\frac{1}{9}\Big),$$

于是当$a\neq f(z_0)$时，就有

$$n\Big(\frac{1}{60},\ \frac{1}{f-a}\Big)\leqslant n\Big(\frac{1}{9},\ z_0,\ \frac{1}{f-a}\Big)<\frac{1}{\log\frac{9}{8}}T\Big(\rho^*,z_0,\frac{1}{f-a}\Big)$$

$$\leqslant\frac{1}{\log\frac{9}{8}}\Big\{T(\rho^*,z_0,f)+\log\frac{1}{|f(z_0)-a|}$$

$$+\log 2+\log^+|a|\Big\}$$

$$<K\Big\{\log\frac{1}{|f(z_0),a|}+\log^+n\Big(1,\ \frac{1}{f}\Big)$$

$$+\log^+\log^+|f(z_0)|+1\Big\}. \qquad (4.21)$$

(1.2.2) 存在$\zeta\in L$，使$\left|\dfrac{f^{(m+1)}(\zeta)}{f^{(m)}(\zeta)-1}\right|=1$，且当$z$在$L$上介于$z_0$与$\zeta$间时，恒有

$$\left|\frac{f^{(m+1)}(z)}{f^{(m)}(z)-1}\right|\leqslant 1.$$

同样，对函数$\Big(\log(f^{(m)}(z)-1)\Big)'$沿$L$积分，得

$$\frac{1}{e}<\left|\frac{f^{(m)}(z)-1}{f^{(m)}(z_0)-1}\right|<e. \tag{4.22}$$

由此，通过沿L逐次积分，并注意到$|f(z_0)|>1$而有

$$|f(\zeta)|<K\left(|f(z_0)|+|f'(z_0)|+\cdots+|f^{(m)}(z_0)|\right). \tag{4.23}$$

为了应用引理4.1，我们来估计 $\left|\frac{f(\zeta)}{f^{(m)}(\zeta)-1}\right|$.

由（4.22）和（4.23），有

$$\left|\frac{f(\zeta)}{f^{(m)}(\zeta)-1}\right|\leqslant e\frac{|f(z_0)|}{|f^{(m)}(z_0)-1|}\frac{|f(\zeta)|}{|f(z_0)|}$$

$$<K\left(1+\sum_{i=1}^{m}\left|\frac{f^{(i)}(z_0)}{f(z_0)}\right|\right)$$

因而

$$\log^+\left|\frac{f(\zeta)}{f^{(m)}(\zeta)-1}\right|<\sum_{i=1}^{m}\log^+\left|\frac{f^{(i)}(z_0)}{f(z_0)}\right|+K. \tag{4.24}$$

另外，因$\left(|z-z_0|\leqslant\frac{1}{20}\right)\subset\left(|z-\zeta|<\frac{1}{4}\right)$而有

$$T(d,z_0f)\leqslant T\left(\frac{1}{20},\ z_0,f\right)\leqslant\log^+M\left(\frac{1}{20},\ z_0,f\right)$$

$$\leqslant\log^+M\left(\frac{1}{4},\ \zeta,\ f\right)\leqslant 7\ m\left(\frac{1}{3},\ \zeta,\ f\right)$$

$$=7\left\{T\left(\frac{1}{3},\ \zeta,\frac{1}{f}\right)+\log|f(\zeta)|\right\}.$$

于是，根据（4.19）式就有

$$\log^+\left|\frac{f^{(i)}(z_0)}{f(z_0)}\right|<K\left\{\log^+n\left(1,\ \frac{1}{f}\right)+1\right.$$

$$+\log^+ T\left(\frac{1}{3}, \zeta, \frac{1}{f}\right)+\log^+\log^+|f(\zeta)|\Big\}, \tag{4.25}$$

由（4.24）和（4.25），并应用引理 4.1 于 $|z-\zeta|\leqslant\frac{1}{2}$，其中取 $r=\frac{5}{12}$，得

$$T\left(\frac{5}{12}, \zeta, \frac{1}{f}\right)<K\Big\{N\log(N+1)+1+\log^+ n\left(1, \frac{1}{f}\right)$$

$$+\log^+ T\left(\frac{1}{3}, \zeta, \frac{1}{f}\right)+\log^+\log^+\frac{1}{|f(\zeta)|}$$

$$+\log^+\log^+|f(\zeta)|+\log^+\log^+\frac{1}{|f^{(m)}(\zeta)-1|}\Big\}.$$

同（4.20）式一样，可消去上式右端的 $\log^+ T\left(\frac{1}{3}, \zeta, \frac{1}{f}\right)$ 而有

$$T\left(\frac{5}{12}, \zeta, \frac{1}{f}\right)<K\Big\{N\log(N+1)+1+\log^+ n\left(1, \frac{1}{f}\right)$$

$$+\log^+\log^+|f(\zeta)|+\log^+\log^+\frac{1}{|f(\zeta)|}$$

$$+\log^+\log^+\frac{1}{|f^{(m)}(\zeta)-1|}\Big\}.$$

仿照情形（1.1）中对（4.15）式的讨论，当 $a\neq f(\zeta)$ 时，就有

$$n\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{f-a}\right)<K\Big\{N\log(N+1)+1+\log^+\frac{1}{|f(\zeta)-a|}$$

$$+\log^+ n\left(1, \frac{1}{f}\right)+\log^+\log^+|f(\zeta)|$$

$$+\log^+\log^+\frac{1}{|f(\zeta)|}+\log^+\log^+\frac{1}{|f^{(m)}(\zeta)-1|}\Big\}$$

(2) $$\left|\frac{f^{(m)}(z_0)-1}{f(z_0)}\right|<1. \qquad (4.26)$$

此时，又区分两种情形：

(2.1) 在L上恒有 $\left|\frac{f^{(m)}(z)-1}{f(z)}\right|<1$.

注意到$|f(z_0)|>1$而有

$$|f^{(m)}(z)|<1+|f(z)|<2\max_L|f(z)| \qquad (z\in L)$$

通过沿L逐次积分，得

$$|f(z)|<|f^{(m-1)}(z_0)|+|f^{(m-2)}(z_0)|+\cdots$$

$$+|f(z_0)|+\frac{1}{3}\max_L|f(z)| \qquad (z\in L).$$

于是

$$|f(z^*)|<\frac{3}{2}(|f(z_0)|+|f'(z_0)|+\cdots+|f^{(m-1)}(z_0)|).$$

再仿照情形(1.2.1)中对(4.17)式的讨论，当$a\neq f(z_0)$时，就使(4.21)式成立.

(2.2) 存在$\zeta\in L$，使

$$\left|\frac{f^{(m)}(\zeta)-1}{f(\zeta)}\right|=1, \qquad (4.27)$$

且当z属于L上介于z_0与ζ间的部分时，恒有

$$\left|\frac{f^{(m)}(z)-1}{f(z)}\right|\leqslant 1. \qquad (4.28)$$

这时，再区分两种情形：

(2.2.1) $\left|\frac{f^{(m)}(\zeta)-1}{f^{(m+1)}(\zeta)}\right|\leqslant 1$.

应用引理4.1可知(4.15)成立，其中以ζ代替z_0. 因此，仿照

对（4.15）的讨论，当 $a \neq f(\zeta)$ 时，就有（4.16）式成立，其中以 ζ 代替 z_0.

(2.2.2)
$$\left|\frac{f^{(m+1)}(\zeta)}{f^{(m)}(\zeta)-1}\right|<1.$$

我们又区分两种情形：

(a) 在 L 上当 z 介于 ζ 与 z^* 间时，恒有

$$\left|\frac{f^{(m+1)}(z)}{f^{(m)}(z)-1}\right|\leqslant 1.$$

仿照情形（1.2.1）的讨论，通过沿 L 逐次积分，有

$$|f(z^*)|<K(1+|f(\zeta)|+|f'(\zeta)|+\cdots+|f^{(m)}(\zeta)|).$$

另外，从条件（4.28）出发，通过沿 L 逐次积分，得

$$|f^{(i)}(\zeta)|<K\Big(|f(z_0)|+|f'(z_0)|+\cdots+|f^{(m-1)}(z_0)|\Big)$$

$$(i=0,1,\cdots,m)$$

于是

$$|f(z^*)|<K\Big(1+|f(z_0)|+|f'(z_0)|+\cdots+|f^{(m-1)}(z_0)\Big),$$

这表示（4.17）式成立，因此，当 $a \neq f(z_0)$ 时，（4.21）式成立.

(b) 在 L 上存在一点 ζ^* 介于 ζ 与 z^* 之间，使

$$\left|\frac{f^{(m+1)}(\zeta^*)}{f^{(m)}(\zeta^*)-1}\right|=1, \tag{4.29}$$

且当 L 上的 z 介于 ζ 与 ζ^* 之间时，恒有

$$\left|\frac{f^{(m+1)}(z)}{f^{(m)}(z)-1}\right|\leqslant 1. \tag{4.30}$$

此时再区分两种情形：

① 在 m 个数 $|f^{(i)}(\zeta)|$ $(i=0,1,\cdots,m-1)$ 中，至少有一个

大于1.

类似于（1.2.1）情形的讨论，通过沿L逐次积分，得

$$|f(\zeta^*)|<K\left(1+|f(\zeta)|+|f'(\zeta)|+\cdots+|f^{(m)}(\zeta)|\right).$$

再结合情形①的条件，就有

$$|f(\zeta^*)|<K\left(|f(\zeta)|+|f'(\zeta)|+\cdots+|f^{(m)}(\zeta)|\right) \tag{4.31}$$

由（4.29），（4.30）及（4.31），可得

$$\left|\frac{f(\zeta^*)}{f^{(m)}(\zeta^*)-1}\right|<e\left|\frac{f(\zeta^*)}{f^{(m)}(\zeta)-1}\right|=e\left|\frac{f(\zeta^*)}{f(\zeta)}\right|$$

$$<eK\left(1+\left|\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right|+\left|\frac{f''(\zeta)}{f(\zeta)}\right|+\cdots+\left|\frac{f^{(m)}(\zeta)}{f(\zeta)}\right|\right).$$

故

$$\log^+\left|\frac{f(\zeta^*)}{f^{(m)}(\zeta^*)-1}\right|<\sum_{i=1}^{m}\log^+\left|\frac{f^{(i)}(\zeta)}{f(\zeta)}\right|+K.$$

再进行类似于情形（1.2.1）中对$\log^+\left|\frac{f^{(i)}(z_0)}{f(z_0)}\right|$的讨论，就有

$$\log^+\left|\frac{f(\zeta^*)}{f^{(m)}(\zeta^*)-1}\right|<K\left\{1+\log\frac{1}{d}+\log^+T(d,\zeta,f)\right.$$

$$\left.+\log^+\log^+\frac{1}{|f(\zeta)|}\right\}. \tag{4.32}$$

另外，因$(|z-\zeta|\leqslant d)\subset\left(|z-\zeta^*|\leqslant\frac{1}{3}\right)$，故

$$T(d,\zeta,f)\leqslant\log^+M(d,\zeta,f)\leqslant\log^+M\left(\frac{1}{3},\ \zeta^*,\ f\right)$$

$$\leqslant 9T\left(\frac{5}{12}, \zeta^*, f\right)$$

$$\leqslant 9T\left(\frac{5}{12}, \zeta^*, \frac{1}{f}\right)+9\log^+|f(\zeta^*)|. \qquad (4.33)$$

应用引理4.1于$|z-\zeta^*|\leqslant\frac{1}{2}$，并结合（4.29），(4.32)及(4.33)，就有

$$T\left(\frac{5}{12}, \zeta^*, \frac{1}{f}\right)<K\Bigg\{\log^+T\left(\frac{5}{12}, \zeta^*, \frac{1}{f}\right)$$

$$+\log^+n\left(1, \frac{1}{f}\right)+N\log(N+1)+1$$

$$+\log^+\log^+|f(\zeta^*)|+\log^+\log^+\frac{1}{|f(\zeta^*)|}$$

$$+\log^+\log^+\frac{1}{|f^{(m)}(\zeta^*)-1|}$$

$$+\log^+\log^+\frac{1}{|f(\zeta)|}\Bigg\}.$$

同（4.20）式一样，我们可消去项$\log^+T\left(\frac{5}{12}, \zeta^*, \frac{1}{f}\right)$，再仿照情形（1.1）中对（4.15）的讨论，当$a\neq f(\zeta^*)$时，就有

$$n\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{f-a}\right)<K\Bigg\{\log^+n\left(1, \frac{1}{f}\right)+N\log(N+1)+1$$

$$+\log\frac{1}{|f(\zeta^*)-a|}+\log^+\log^+|f(\zeta^*)|$$

$$+\log^+\log^+\frac{1}{|f(\zeta^*)|}$$

$$+\log^+\log^+\frac{1}{|f^{(m)}(\zeta^*)-1|}$$

$$+\log^+\log^+\frac{1}{|f(\zeta)|}\Big\}. \tag{4.34}$$

② $|f^{(i)}(\zeta)|\leqslant 1 \quad (i=0,1,\cdots,m-1)$

从条件（4.28）出发，类似于（2.1）情形的讨论，通过沿L逐次积分，得

$$|f(z_0)|<K\Big(1+|f(\zeta)|+|f'(\zeta)|+\cdots+|f^{(m-1)}(\zeta)|\Big)\leqslant mK.$$

于是

$$T(\rho_0,\ f)<K.$$

从而当$a\neq f(0)$时，

$$n\left(\frac{1}{240},\ \frac{1}{f-a}\right)\leqslant\frac{1}{\log 2}N\left(\rho_0,\ \frac{1}{f-a}\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{\log 2}\Big\{T(\rho_0,f)+\log^+|a|+\log 2$$

$$+\log\frac{1}{|f(0)-a|}\Big\}$$

$$<K\Big\{1+\log\frac{1}{|f(0),a|}\Big\}. \tag{4.35}$$

至此引理证毕.

现在我们来证明定理4.6.

设Δ: $\arg z=\theta_0(0\leqslant\theta_0<2\pi)$为$f(z)$的一条$\rho$级 Borel 方向，以下我们证方向$\Delta$就具有定理4.6所要求的性质. 假若不对，即存在三个正整数k，l和m，适合条件

$$\frac{m+1}{k}+\frac{1}{l}<1$$

以及一个有穷复数a、一个有穷非零复数b与一个正数ε，使当r充分大时，

$$n_{k-1)}(r,\theta_0,\varepsilon,f=a)+n_{l-1)}(r,\theta_0,\varepsilon,f^{(m)}=b)$$
$$<r^{\tau}\quad(0<\tau<\rho).\tag{4.36}$$

令

$$g(z)=\frac{f(z)-a}{b},$$

显然$g(z)$仍为ρ级整函数，且方向 Δ: $\arg z=\theta_0$仍为其Borel 方向．于是根据定理4.4，存在一列充满圆

$$\Gamma_n:\ |z-z_n|<\varepsilon_n|z_n|,$$
$$|z_{n+1}|>2\,|z_n|,$$
$$\arg z_n=\theta_0\ (n=1,2,\cdots),\ \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0,$$

使得在每个Γ_n内，$g(z)$取任意复数至少$|z_n|^{\rho-\eta_n}$次，至多除去一些复数可含于半径为δ_n的两个球面小圆S_n，S'_n内，其中$\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n=\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n=0$．

取 Γ'_n: $|z-z_n|\leqslant 240\varepsilon_n|z_n|$。当$n$充分大时，

$$\Gamma'_n\subset(|\arg z-\theta_0|<\varepsilon).$$

令

$$G(t)=\frac{g(z_n+240\varepsilon_n|z_n|t)}{(240\varepsilon_n|z_n|)^m},$$

则$G(t)$于$|t|\leqslant 1$全纯，且当n充分大时，

$$n_{k-1)}\left(1,\ \frac{1}{G}\right)+n_{l-1)}\left(1,\ \frac{1}{G^{(m)}-1}\right)<2\,|z_n|^{\tau}.\tag{4.37}$$

根据引理4.2，[1]对任意复数a，有

$$n(\Gamma_n,g=a)=n\left(\frac{1}{240},\quad G=\frac{a}{(240\varepsilon_n|z_n|)^m}\right)$$

1）我们假定满足（4.11）式，若满足（4.10）式，则立即有（4.39）式

$$<K\left\{\log^+ n\left(1,\frac{1}{G}\right)+2|z_n|^\tau\log(2|z_n|^\tau+1)+1\right.$$

$$+\log\frac{1}{|G(t_1),a|}+\log^+\log^+|G(t_1)|$$

$$+\log^+\log^+\frac{1}{|G(t_1)|}+\log^+\log^+\frac{1}{|G^{(m)}(t_1)-1|}$$

$$\left.+\log^+\log^+\frac{1}{|G(t_2)|}\right\},$$

其中 $|t_1|<\frac{1}{5}$，$|t_2|<\frac{1}{5}$，且t_1，t_2与$G(t)$在 $|t|\leqslant 1$ 上的零点及 $G^{(m)}(t)-1$的零点的距离分别大于

$$10^{-3}\left[n\left(1,\frac{1}{G}\right)+1\right]^{-1}\text{及}10^{-3}\left[n\left(1,\frac{1}{G^{(m)}-1}\right)+1\right]^{-1}$$

令

$$z_n'=z_n+240\,\varepsilon_n|z_n|\,t_1,\quad z_n''=z_n+240\varepsilon_n|z_n|\,t_2,$$

于是

$$n(\Gamma_n,\ g=a)<K\left\{\log^+ n\left(1,\frac{1}{G}\right)+2|z_n|^\tau\log(2|z_n|^\tau+1)+1\right.$$

$$+\log\frac{1}{\left[\dfrac{g(z_n')}{(240\varepsilon_n|z_n|)^m},\ \dfrac{a}{(240\varepsilon_n|z_n|)^m}\right]}$$

$$+\log^+\log^+\left|\frac{g(z_n')}{(240\varepsilon_n|z_n|)^m}\right|$$

$$+\log^+\log^+\left|\frac{(240\varepsilon_n|z_n|)^m}{g(z_n')}\right|$$

$$+\log^+\log^+\frac{1}{|g^{(m)}(z_n')-1|}$$

$$+\log^+\log^+\left|\frac{(240\varepsilon|z_n|)^m}{g(z_n'')}\right|\Bigg\}. \qquad (4.38)$$

当n充分大时，不妨假定$\varepsilon_n|z_n|>1$，因此，上式右端括号内第四项应小于$\log\frac{(240\varepsilon_n|z_n|)^m}{|g(z_n'),\ \alpha|}$. 另外，$z_n'$及$z_n''$与$g(z)$的每个零点距离分别大于

$$10^{-8}\left[n\left(2|z_n'|,\ \frac{1}{g}\right)+1\right]^{-1}\text{及}10^{-8}\left[n\left(2|z_n''|,\ \frac{1}{g}\right)+1\right]^{-1},$$

而z_n'与$g^{(m)}(z)-1$的零点距离大于$10^{-8}\left[n\left(2|z_n'|,\frac{1}{g^{(m)}-1}\right)+1\right]^{-1}$. 又因$g(z)$，$\frac{1}{g(z)}$及$\frac{1}{g^{(m)}(z)-1}$之级均为$\rho$，故应用Poisson-Jensen公式（1.1），当n充分大时，$\log^+\log^+|g(z_n')|$，

$\log^+\log^+\frac{1}{|g(z_n')|}$，$\log^+\log^+\frac{1}{|g^{(m)}(z_n')-1|}$及

$\log^+\log^+\frac{1}{g(z_n'')}$ 均小于

$$(\rho+1)\log|z_n|+(\rho+1)\log 3.$$

再注意到

$$\log^+n\left(1,\ \frac{1}{G}\right)\leqslant\log^+n\left(2|z_n|,\frac{1}{}\right.$$

$$\leqslant \log^+ T\left(3|z_n|, \frac{1}{g}\right) + \log\left(\frac{1}{\log\frac{3}{2}}\right)$$

$$< (\rho+1)\log|z_n| + K.$$

我们从（4.38）式就可知，当n充分大时，

$$n(\Gamma_n, g=a) < K\left\{|z_n|^\tau \log|z_n| + \log\frac{1}{|g(z_n'), a|}\right\}. \tag{4.39}$$

因此，至多除去一个球面半径为$e^{-|z_n|^\tau}$的小圆S_n''后，对于其它复数a，恒有

$$n(\Gamma_n, g=a) < |z_n|^{\tau_1} \quad (\tau<\tau_1<\rho).$$

因S_n，S_n'及S_n''的球面半径都趋于零，故当n充分大时，就可选取复数$a_n \overline{\in} S_n \cup S_n' \cup S_n''$. 这样就有

$$|z_n|^{\rho-\eta_n} < |z_n|^{\tau_1}$$

即

$$\rho-\eta_n < \tau_1.$$

令n趋于无穷便得到矛盾. 定理4.6得证.

作为定理4.6的特殊情况我们有

系理4.1　设$f(z)$为ρ（$0<\rho<+\infty$）级整函数，则存在一条由原点出发的半直线Δ：$\arg z=\theta_0$（$0\leqslant\theta_0<2\pi$），使得对于任意正数ε、一切有穷复数a、一切有穷非零复数b与一切正整数m，恒有

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log\left\{n(r,\theta_0,\varepsilon,f=a)+n(r,\theta_0,\varepsilon,f^{(m)}=b)\right\}}{\log r}=\rho.$$

显然，上述方向Δ可看作与Miranda正规定则（定理2.9）相应的奇异方向.

与Hayman不等式(定理3.12)相应的正规定则(定理3.13)被作者建立后不久，杨乐[1]提出：是否存在相应的奇异方向?这是个困难而有趣的问题，已被张庆德和杨乐[1]解决，陈怀惠[1]又简化了他们的证明. 这就是下述定理.

定理4.7 设$f(z)$为开平面上具有有限正级ρ的亚纯函数，则存在一条由原点出发的半直线Δ：$\arg z=\theta_0$（$0\leqslant\theta_0<2\pi$），使得对于任意正数ε、一切有穷复数a、一切有穷非零复数b与一切正整数k. 恒有

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log\left\{n(r,\theta_0,\varepsilon,f=a)+n(r,\theta_0,\varepsilon,f^{(k)}=b)\right\}}{\log r}=\rho.$$

为了证定理4.7，我们先证两个引理.

引理4.3 设$f(z)$于$|z|<R$（$0<R<\infty$）亚纯. 若k为一正整数且

$$f(0)\neq 0,\ \infty;\quad f^{(k)}(0)\neq 1;\quad f^{(k+1)}(0)\neq 0;$$

$$(k+1)f^{(k+2)}(0)\left(f^{(k)}(0)-1\right)-(k+2)f^{(k+1)}(0)^2\neq 0,$$

则当$0<r<R$时,

$$T(r,f)<K\left\{N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)+\log\frac{R}{R-r}\right.$$

$$+\log^+R+\log^+\frac{1}{R}+1+\log^+|f(0)|$$

$$+\log^{+}|f^{(k)}(0)|+\log^{+}\frac{1}{|f^{(k+1)}(0)|}$$

$$+\log^{+}\frac{1}{|(k+1)f^{(k+2)}(0)(f^{(k)}(0)-1)-(k+2)f^{(k+1)}(0)^{2}|}\Bigg\}$$

$$(4.40)$$

证明 应用定理3.12，并注意到余项$S(r,f)$中对于项$m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)$、$m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)$及$m\left(r,\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}-1}\right)$，有（2.23），（2.24），（2.25）及（2.26）式成立. 另外仿照（2.25）及（2.26）的处理，$S(r,f)$中项$m\left(r,\frac{f^{(k+2)}}{f^{(k+1)}}\right)$满足

$$m\left(r,\frac{f^{(k+2)}}{f^{(k+1)}}\right)<K\left\{1+\log^{+}\frac{1}{r}+\log^{+}\frac{1}{\rho-r}\right.$$

$$+\log^{+}T(\rho,f)+\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f(0)|}$$

$$\left.+\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f^{(k+1)}(0)|}\right\}\quad(0<r<\rho<R)$$

于是，当$0<r<\rho<R$时，

$$T(r,f)<K\left\{1+\log^{+}\frac{1}{r}+\log^{+}\frac{1}{\rho-r}+\log^{+}T(\rho,f)\right.$$

$$+\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f(0)|}+\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f^{(k)}(0)-1|}$$

$$\left.+\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f^{(k+1)}(0)|}\right\}+\left(2+\frac{1}{k}\right)N\left(r,\frac{1}{f}\right)$$

$$+\left(2+\frac{2}{k}\right)\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{(k)}-1}\right)$$

$$+\left(2+\frac{1}{k}\right)\log\left|\frac{f(0)(f^{(k)}(0)-1)}{f^{(k+1)}(0)}\right|$$

$$+\frac{1}{k}\log\left|\frac{f^{(k+1)}(0)\left(f^{(k)}(0)-1\right)}{(k+1)f^{(k+2)}(0)\left(f^{(k)}(0)-1\right)-(k+2)f^{(k+1)}(0)^2}\right|$$

再根据引理2.3和2.5就知（4.40）式成立.

引理4.4 设$f(z)$于$|z|\leqslant 1$上亚纯，置

$$n(1,f=0)+n(1,f^{(k)}=1)=N,$$

$$n(1,f)=N'.$$

则存在点z^*与z_0满足$|z^*|<\frac{1}{8}$，$|z_0|<\frac{1}{32}$及

$$\prod_{j=1}^{N'}|z_0-\beta_j|\geqslant\left(\frac{1}{512e}\right)^{N'},$$

其中β_j（$j=1, 2, \cdots, N'$）为$f(z)$在$|z|\leqslant 1$上的极点，且对一切复数a，都有

$$n\left(\frac{1}{32}, f=a\right)<K\left\{N+1+\log^+\log^+|f(z_0)|\right.$$

$$\left.+\log\frac{1}{|f(z^*), a|}\right\}. \tag{4.41}$$

证明 根据Boutroux-Cartan定理，存在两组除外圆$(\gamma)_1$和$(\gamma)_2$，它们所含圆的个数分别不超过N和N''，半径总和不超过$\frac{1}{256}$，且当$z\overline{\in}(\gamma)_1$时，

$$\prod_{j=1}^{N}|z-a_j|\geqslant\left(\frac{1}{512e}\right)^N, \tag{4.42}$$

其中a_j（$j=1, 2, \cdots, N$）为函数$f(z)$和$f^{(k)}(z)-1$在$|z|\leqslant$

1 上的一切零点，而当 $z\overline{\in}(\gamma)_2$ 时

$$\prod_{|\beta_i|<\frac{8}{64}}|z-\beta_i|\geqslant\left(\frac{1}{512e}\right)^{N''},\tag{4.43}$$

其中 N'' 表示 $f(z)$ 在圆 $|z|<\frac{3}{64}$ 上的极点个数. 在圆 $|z|<\frac{1}{32}$ 内取点 $z_0\overline{\in}(\gamma)_1\cup(\gamma)_2$. 不难看出，存在两正数 r_1 和 r_2：$\frac{5}{64}\leqslant r_1<r_2\leqslant\frac{6}{64}$，$r_2-r_1=\frac{1}{128(N+1)}$，使圆环 D：$r_1\leqslant|z-z_0|\leqslant r_2$ 与 $(\gamma)_1$ 无公共点. 下面我们区分三种情形：

（1）在 D 上恒有

$$\sum_{j=0}^{k+1}|f^{(j)}(z)|>\frac{1}{4}.$$

此时，应用定理1.13′，当 $r_1<r<\rho<r_2$ 时，有

$$m\left(r,\ z_0,\ \frac{1}{f}\right)<K\left\{1+\log^+\frac{1}{\rho-r}+\log^+\log^+\frac{1}{|f(z_0)|}\right.$$

$$\left.+\log^+T(\rho,\ z_0,\ f)\right\}.$$

另外由（4.42）式，有

$$N\left(r,z_0,\frac{1}{f}\right)\leqslant\log\left(\prod_{j=1}^{N}\frac{2}{|z_0-\alpha_j|}\right)\leqslant N\log(1024e),$$

故

$$T\left(r,z_0,\frac{1}{f}\right)<K\left\{N+1+\log^+\frac{1}{\rho-r}+\log^+\log^+|f(z_0)|\right.$$

$$\left.+\log^+\log^+\frac{1}{|f(z_0)|}+\log^+T\left(\rho,z_0,\frac{1}{f}\right)\right\}.$$

应用引理2.5于 $U(r)$，其中置

$$U(r)=\begin{cases} T\left(r,z_0,\ \dfrac{1}{f}\right), & 若 r_1\leqslant r<r_2, \\ 0, & 若 0<r<r_1, \end{cases}$$

就得

$$T\left(r,z_0,\ \frac{1}{f}\right)<K\left\{N+1+\log^+\frac{1}{r_2-r}+\log^+\log^+\frac{1}{|f(z_0)|}\right.$$

$$\left.+\log^+\log^+|f(z_0)|\right\}\quad (r_1\leqslant r<r_2)$$

于是，再根据引理2.3，就有

$$T\left(\frac{5}{64},\ z_0,\ f\right)=T\left(\frac{5}{64},\ z_0,\ \frac{1}{f}\right)+\log|f(z_0)|$$

$$<\log^+|f(z_0)|\ +K\left\{N+1+\log^+\log^+|f(z_0)|\right\}.$$

故

$$n\left(\frac{1}{32},\ f=a\right)\leqslant n\left(\frac{1}{16},\ z_0,\ f=a\right)\leqslant\frac{1}{\log\frac{5}{4}}T\left(\frac{5}{64},z_0,\frac{1}{f-a}\right)$$

$$<\frac{1}{\log\frac{5}{4}}\left\{\log\frac{1}{|f(z_0)-a|}+\log^+|a|\right.$$

$$\left.+\log^+|f(z_0)|+K\left(N+1+\log^+\log^+|f(z_0)|\right)\right\}$$

$$<K\left\{N+1+\log^+\log^+|f(z_0)|+\log\frac{1}{|f(z_0)-a|}\right\}.$$

另外，由（4.43）还知z_0满足

$$\prod_{j=1}^{N'}|z_0-\beta_j|=\prod_{|\beta_j|<\frac{8}{64}}|z_0-\beta_j|\prod_{|\beta_j|\geqslant\frac{8}{64}}|z_0-\beta_j|$$

$$\geqslant\left(\frac{1}{512e}\right)^{N''}\left(\frac{1}{64}\right)^{N'-N''}\geqslant\left(\frac{1}{512e}\right)^{N'}$$

（2） 在D上存在三点z_1，z_2和z_3，使

$$\sum_{j=0}^{k+1}|f^{(j)}(z_1)|\leqslant\frac{1}{4},\quad |f^{(k+1)}(z_2)|\geqslant\frac{1}{4},\quad |f^{(k+2)}(z_3)|\geqslant\frac{1}{2}. \tag{4.44}$$

在D上作长度$\leqslant\frac{1}{3}$的曲线$\widehat{z_1z_2}$. 显然在$\widehat{z_1z_2}$上存在点z_4，使

$$|f^{(k+1)}(z_4)|=\frac{1}{4},\quad |f^{(k+1)}(z)|\leqslant\frac{1}{4}\qquad (z\in\widehat{z_1z_4}) \tag{4.45}$$

这时，再区分两种情形：

(2.1) $$|f^{(k+2)}(z_4)|\geqslant\frac{1}{2}.$$

根据（4.45），通过积分可估计出

$$|f^{(k)}(z_4)|\leqslant\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}<\frac{1}{2},\quad |f(z_4)|<\frac{1}{2},$$

$$\left|(k+1)f^{(k+2)}(z_4)\left(f^{(k)}(z_4)-1\right)-(k+2)f^{(k+1)}(z_4)^2\right|$$

$$>\frac{k+1}{4}-\frac{k+2}{16}>\frac{1}{4}.$$

在圆$|z-z_4|<\frac{7}{8}$上，应用引理4.7，再注意到上面的估计及

$$N\left(\frac{7}{8},\ z_4,\ f=0\right)+\overline{N}\left(\frac{7}{8},\ z_4,\ f^{(k)}=1\right)$$

$$\leqslant N\log(1024e),$$

就有

$$T(r,z_4,f)<K\left\{N+1+\log\frac{1}{\frac{7}{8}-r}\right\}\quad\left(0<r<\frac{7}{8}\right).$$

于是

$$n\left(\frac{1}{32}, f=a\right) \leqslant n\left(\frac{5}{32}, z_4, f=a\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{\log\frac{6}{5}} T\left(\frac{3}{16}, z_4, \frac{1}{f-a}\right)$$

$$< K\left\{N+1+\log\frac{1}{|f(z_4), a|}\right\}. \qquad (4.46)$$

(2.2) $\quad |f^{(k+2)}(z_4)| < \frac{1}{2}$.

在D上作长度$\leqslant \frac{1}{3}$的曲线$\widehat{z_4 z_3}$. 显然在$\widehat{z_4 z_3}$上存在一点z^*使

$$|f^{(k+2)}(z^*)| = \frac{1}{2}, \quad |f^{(k+2)}(z)| \leqslant \frac{1}{2} \qquad (z \in \widehat{z_4 z^*}).$$

由此及（4.44）式，并通过积分可估计出

$$|f^{(k+1)}(z)| \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{12} \qquad (z \in \widehat{z_4 z^*}),$$

$$|f^{(k+1)}(z^*)| \geqslant \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12},$$

$$|f^{(k)}(z^*)| \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{15}{12} \cdot \frac{1}{3} = \frac{17}{36},$$

$$|f(z^*)| < 1 + \sum_{j=0}^{k+1} |f^{(j)}(z_j)| \leqslant \frac{5}{4},$$

$$|(k+1)f^{(k+2)}(z^*)\left(f^{(k)}(z^*) - 1\right) - (k+2)f^{(k+1)}(z^*)^2|$$

$$\geqslant(k+1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{17}{36}\right)-(k+2)\cdot\frac{25}{144}\geqslant\frac{1}{144}.$$

仿照情形 (2.1)，在圆$|z-z^*|<\frac{7}{8}$上，应用引理4.3就有 (4.46) 式成立，其中以z^*代替z_4.

(3) 在D上存在点z_1，使

$$\sum_{j=0}^{k+1}|f^{(j)}(z_1)|\leqslant\frac{1}{4},$$

同时在D上或者恒有$|f^{(k+1)}(z)|<\frac{1}{4}$，或者恒有$|f^{(k+2)}(z)|<\frac{1}{2}$. 此时，在$D$上恒有

$$|f^{(k+1)}(z)|\leqslant\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12},$$

$$|f^{(k)}(z)|\leqslant\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{18},$$

$$|f(z)|\leqslant\frac{5}{4}.$$

由此可知，在D上恒有

$$\left|\frac{f^{(k+1)}(z)}{f^{(k)}(z)-1}\right|\leqslant\frac{45}{66}.$$

于是

$$|n(r_1,z_0,f^{(k)}=\infty)-n(r_1,z_0,f^{(k)}=1)|\leqslant\frac{5}{64}\cdot\frac{45}{66}<\frac{45}{832}.$$

故

$$n(r_1,z_0,f=\infty)\leqslant n(r_1,z_0,f^{(k)}=\infty)\leqslant N.$$

而

$$\prod_{|\beta_j - z_0| < r_1} |\beta_j - z_0| = \prod_{|\beta_j| < \frac{8}{64}} |\beta_j - z_0| \prod_{\substack{|\beta_j - z_0| < r_1 \\ |\beta_j| > \frac{8}{64}}} |\beta_j - z_0|$$

$$\geqslant \left(\frac{1}{512e}\right)^{N''} \cdot \left(\frac{1}{64}\right)^{N-N''}$$

$$\geqslant \left(\frac{1}{512e}\right)^{N}.$$

因而

$$N(r_1,\ z_0,\ f) \leqslant N \log\ (512e),$$

$$T(r_1,\ z_0,\ f) = m(r_1,\ z_0,\ f) + N(r_1,\ z_0,\ f)$$

$$< K(N+1).$$

由此就有

$$n\left(\frac{1}{32},\ f=a\right) \leqslant n\left(\frac{1}{16},\ z_0,\ f=a\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{\log \frac{5}{4}} T\left(\frac{5}{64},\ z_0,\ \frac{1}{f-a}\right)$$

$$< K\left\{N + 1 + \log \frac{1}{|f(z_0),\ a|}\right\}.$$

至此引理证毕.

现在来证定理4.7.

设Δ: $\arg z = \theta_0$ ($0 \leqslant \theta_0 < 2\pi$) 为$f(z)$的一条 ρ 级 Borel 方向，以下我们证明方向Δ就具有定理4.7所要求的性质. 假若不对，即存在一个正整数k，一个有穷复数a，一个有穷非零复数 b 及一个正数ε，使当r充分大时，有

$$n(r,\ \theta_0,\ \varepsilon,\ f=a) + n(r, \theta_0,\ \varepsilon, f^{(k)} = b) < r^{\tau} \quad (0 < \tau < \rho). \tag{4.47}$$

令

$$g(z)=\frac{1}{b}\left\{f(z)-a\right\}.$$

显然，$g(z)$仍为ρ级亚纯函数，且方向Δ_1 $\arg z=\theta_0$仍为其Borel方向．于是，根据定理4.4′，存在一列充满圆

$$\Gamma_n:\ |z-z_n|<\varepsilon_n|z_n|,\ |z_{n+1}|>2|z_n|,\ \arg z_n=\theta_0$$
$$(n=1,2,\cdots),$$

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0,$$

使得在每个Γ_n内，$g(z)$取任意复数至少$|z_n|^{\rho-\eta_n}$次，至多除去一些复数可含于半径为δ_n的两个球面小圆S_n，S_n'内，其中

$$\lim_{n\to\infty}\eta_n=\lim_{n\to\infty}\delta_n=0.$$

取Γ_n'：$|z-z_n|\leqslant 32\varepsilon_n|z_n|$，显然，当$n$充分大时，

$$\Gamma_n'\subset(|\arg z-\theta_0|<\varepsilon).$$

令

$$G(t)=\frac{g(z_n+32\varepsilon_n|z_n|t)}{(32\varepsilon_n|z_n|)^k},$$

于是，$G(t)$于$|t|\leqslant 1$全纯，且当n充分大时，

$$n(1,G=0)+n(1,G^{(k)}=1)<2|z_n|^{\tau}. \tag{4.48}$$

根据引理4.4，对任意复数a，有

$$n(\Gamma_n,\ g=a)=n\left(\frac{1}{32},\ G=\frac{a}{(32\varepsilon_n|z_n|)^k}\right)$$

$$<K\left\{2|z_n|^{\tau}+1+\log^+\log^+|G(t_1)|+\log\frac{1}{|G(t_2),\ a|}\right\},$$

其中$|t_1|<\frac{1}{32}$，$|t_2|<\frac{1}{8}$，且

$$\prod_{j=1}^{N'}|t_1-\beta_j|\geqslant\left(\frac{1}{512e}\right)^{N'},$$

而$\beta_j(j=1,2,\cdots,N')$为$G(t)$在$|t|\leqslant 1$上的极点.

令

$$z_n'=z_n+32\varepsilon_n|z_n|t_1,\quad z_n''=z_n+32\varepsilon_n|z_n|t_2,$$

于是

$$n(\Gamma_n,\ g=a)<K\left\{2|z_n|+1+\log^+\log^+\left|\frac{g(z_n')}{(32\varepsilon_n|z_n|)^k}\right|+\log\frac{1}{\left[\frac{g(z_n'')}{(32\varepsilon_n|z_n|)^k},\ \frac{a}{(32\varepsilon_n|z_n|)^k}\right]}\right\}.\quad(4.49)$$

当n充分大时，不妨设$\varepsilon_n|z_n|>1$. 这样，上式右端括号内最后一项应小于

$$\log\frac{(32\varepsilon_n|z_n|)^k}{|g(z_n''),a|}.$$

另外，若令

$$\beta_j^*=z_n+32\varepsilon_n|z_n|\beta_j\quad(j=1,2,\cdots,N'),$$

那么β_j^* $(j=1,2,\cdots,N')$ 即为$g(z)$在Γ_n'上的所有极点，且

$$\prod_{j=1}^{N'}\left|z_n'-\beta_j^*\right|=(32\varepsilon_n|z_n|)^{N'}\prod_{j=1}^{N'}|t_1-\beta_j|\geqslant\left(\frac{1}{512e}\right)^{N'}.$$

故由Poisson-Jensen公式（1.1），有

$$\log^+|g(z_n')| \leqslant \frac{3|z_n|+|z_n'|}{3|z_n|-|z_n'|}T(3|z_n|,\ g)$$

$$+\log \prod_{\substack{|\tau|\leqslant 3|z_n| \\ g(\tau)=\infty}} \left|\frac{(3|z_n|)^2-\bar{\tau}z_n'}{3|z_n|(\tau-z_n')}\right|$$

$$\leqslant 5T(3|z_n|,g)+n(3|z_n|,g)\log(6|z_n|)$$

$$+\log \prod_{\substack{|\tau|\leqslant 3|z_n| \\ |\tau-z_n|>32|z_n|}} \frac{1}{|\tau-z_n'|}$$

$$+\log\prod_{j=1}^{N}\frac{1}{|\beta_j^*-z_n'|}$$

$$\leqslant 5\,T(3|z_n|,g)+n(3|z_n|,\ g)\left\{\log(6|z_n|)\right.$$

$$\left.+\log(512e)\right\}.$$

再注意到$g(z)$之级为ρ就知，当n充分大时，

$$\log^+\log^+|g(z_n')|<(\rho+1)\log|z_n|.$$

于是，由（4.49）式，得

$$n(\Gamma_n, g=a)<K\left\{|z_n|^{\tau}+\log|z_n|+\log\frac{1}{|g(z_n''),\ a|}\right\}.$$

由此可知，当n充分大时，至多除去一个球面半径为$e^{-|z_n|^{\tau}}$的小圆S_n''后，对于一切复数a，有

$$n(\Gamma_n,\ g=a)<|z_n|^{\tau_1}(\tau<\tau_1<\rho).$$

因S_n，S_n'及S_n''的球面半径均趋于零，故当n充分大时就可选取a_n

$\overline{\in} S_n \cup S_n' \cup S_n''$. 这就有

$$|z_n|^{\rho-\eta_n}<|z_n|^{\tau_1}$$

即$\rho-\eta_n<\tau_1$. 令$n\to\infty$, 得$\rho\leqslant\tau_1$, 从而矛盾. 这就证明了定理4.7

上述方向可称为Hayman方向. 最近, 作者和龚向宏[1]推广了定理4.7,把定理中的复数a,b换为级小于ρ的任意两个亚纯函数, 这就是下述定理.

定理4.8 设$f(z)$为开平面上$\rho(0<\rho<\infty)$级亚纯函数,则存在一条由原点出发的半直线Δ: $\arg z=\theta_0(0\leqslant\theta_0<2\pi)$, 使得对于任意正数$\varepsilon$、任意正整数$k$及任意两个开平面上级小于$\rho$的亚纯函数$a(z)$与$b(z)$, 只要$b(z)-a^{(k)}(z)\not\equiv 0$, 就有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\left\{n\left(r,\theta_0,\varepsilon,f=a(z)\right)+n\left(r,\theta_0,\varepsilon,f^{(k)}=b(z)\right)\right\}}{\log r}=\rho.$$

在证定理4.8之前,我们先建立两个引理.

引理4.5 设$f(z)$、$\varphi(z)$于$|z|\leqslant R(0<R<+\infty)$亚纯, k为正整数. 置$h(z)=\dfrac{f^{(k)}(z)}{\varphi(z)}$. 若$f(0)\neq 0$, ∞, $\varphi(0)\neq 0$, ∞, $h'(0)\neq 0$, $h(0)\neq 1$及

$$2\frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)}+(k+2)\frac{h'(0)}{h(0)-1}-(k+1)\frac{h''(0)}{h'(0)}\neq 0,$$

则当$0<r<R$时, 有

$$T(r,f)<K\left\{N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{h-1}\right)+1+\log\frac{R}{R-r}+\log^+R\right.$$

$$\left.+\log^+\frac{1}{R}+T(R,\varphi)+T(R,\varphi')+\log^+\left|\frac{1}{\varphi(0)}\right|\right.$$

$$+\log^+|f(0)|+\log^+|h(0)-1|+\log^+\frac{1}{|h'(0)|}$$

$$+\log^+\frac{1}{\left|2\frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)}+(k+2)\frac{h'(0)}{h(0)-1}-(k+1)\frac{h''(0)}{h'(0)}\right|}\Bigg\}$$

$$(4.50)$$

证明 由恒等式

$$\frac{1}{f}=\frac{h}{f}-\frac{h-1}{h'}\quad\frac{h'}{f}$$

得

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)\leqslant m\left(r,\frac{h}{f}\right)+m\left(r,\frac{h'}{f}\right)+m\left(r,\frac{h-1}{h'}\right)+\log 2$$

$$=m\left(r,\frac{h}{f}\right)+m\left(r,\frac{h'}{f}\right)+m\left(r,\frac{h'}{h-1}\right)$$

$$+N(r,h')+N\left(r,\frac{1}{h-1}\right)-N(r,h-1)$$

$$-N\left(r,\frac{1}{h'}\right)+\log\left|\frac{h(0)-1}{h'(0)}\right|+\log 2$$

$$\leqslant m\left(r,\frac{h}{f}\right)+m\left(r,\frac{h'}{f}\right)+m\left(r,\frac{h'}{h-1}\right)$$

$$+\overline{N}(r,h)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{h-1}\right)-N_0\left(r,\frac{1}{h'}\right)$$

$$+\log\left|\frac{h(0)-1}{h'(0)}\right|+\log 2,$$

其中 $N_0\left(r,\frac{1}{h'}\right)$ 表示 $|z|\leqslant r$ 上 h' 的零点但不是 $h-1$ 的零点的密指量. 再注意到 $\overline{N}(r,h)\leqslant\overline{N}(r,f)+N\left(r,\frac{1}{\varphi}\right)$, 而有

$$T(r,f)\leqslant m\left(r,\frac{h}{f}\right)+m\left(r,\frac{h'}{f}\right)+m\left(r,\frac{h'}{h-1}\right)$$

$$+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{\overline{N}}(r,f)+N\left(r,\frac{1}{\varphi}\right)$$

$$+\overline{\overline{N}}\left(r,\frac{1}{h-1}\right)-N_0\left(r,\frac{1}{h'}\right)$$

$$+\log\left|\frac{h(0)-1}{h'(0)}\right|+\log|f(0)|+\log 2. \tag{4.51}$$

由（4.51）得

$$\overline{\overline{N}}_{(2}(r,f)\leqslant m\left(r,\frac{h}{f}\right)+m\left(r,\frac{h'}{f}\right)+m\left(r,\frac{h'}{h-1}\right)$$

$$+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{\varphi}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{h-1}\right)$$

$$-N_0\left(r,\frac{1}{h'}\right)+\log\left|\frac{h(0)-1}{h'(0)}\right|$$

$$+\log|f(0)|+\log 2. \tag{4.52}$$

置

$$g(z)=\frac{\varphi^2(h-1)^{k+2}}{(h')^{k+1}}.$$

不难验证，当z_0为$f(z)$的单极点且$\varphi(z_0)\neq 0$，∞时，

$$g(z_0)\neq 0,\ \infty,\ g'(z_0)=0. \tag{4.53}$$

事实上，若z_0为$f(z)$的单极点，则在$z=z_0$附近，有

$$f(z)=\frac{a}{z-z_0}+O(1)\quad(a\neq 0)$$

又设

$$\varphi(z)=\beta_1+\beta_2(z-z_0)+\cdots\quad(\beta_1\neq 0).$$

于是

$$\frac{1}{\varphi(z)}=\frac{1}{\beta_1}-\frac{\beta_2}{\beta_1^2}(z-z_0)+O\left((z-z_0)^2\right),$$

$$f^{(k)}(z)=\frac{(-1)^k k!\alpha}{(z-z_0)^{k+1}}+O(1),$$

$$h(z)=\frac{(-1)^k k!\alpha}{\beta_1(z-z_0)^{k+1}}-\frac{(-1)^k k!\alpha\beta_2}{\beta_1^2(z-z_0)^k}+O(1),$$

$$h'(z)=\frac{(-1)^{k+1}(k+1)!\alpha}{\beta_1(z-z_0)^{k+2}}+\frac{k(-1)^k k!\alpha\beta_2}{\beta_1^2(z-z_0)^{k+1}}+O(1)$$

故

$$g(z)=\frac{\beta_1\left[(-1)^k k!\alpha\right]^{k+2}}{\left[(-1)^{k+1}(k+1)!\alpha\right]^{k+1}}$$

$$\times\frac{\left[1-\frac{\beta_2}{\beta_1}(k+2)(z-z_0)+O\left((z-z_0)^2\right)\right]}{1-\frac{k\beta_2}{\beta_1}(z-z_0)+O\left((z-z_0)^2\right)}$$

$$\times\left[1+\frac{2\beta_2}{\beta_1}(z-z_0)+O\left((z-z_0)^2\right)\right].$$

由此立即可知（4.53）成立．另外

$$m\left(r,\frac{g'}{g}\right)-m\left(r,\frac{g}{g'}\right)+\log\left|\frac{g(0)}{g'(0)}\right|$$

$$=N\left(r,\frac{g}{g'}\right)-N\left(r,\frac{g'}{g}\right)$$

$$= N_0\left(r, \frac{1}{g'}\right) - \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) - \overline{N}(r, g), \quad (4.54)$$

其中 $N_0\left(r, \frac{1}{g'}\right)$ 表示 $|z| \leqslant r$ 上 $g'(z)$ 的零点而不是 $g(z)$ 的零点的密指量. 于是，由（4.53）及（4.54），有

$$N_{1)}(r, f) \leqslant N_0\left(r, \frac{1}{g'}\right)$$

$$\leqslant \overline{\overline{N}}\left(r, \frac{1}{g}\right) + \overline{N}(r, g) + m\left(r, \frac{g'}{g}\right) + \log\left|\frac{g(0)}{g'(0)}\right|$$

$$\leqslant N\left(r, \frac{1}{\varphi}\right) + N(r, \varphi) + \overline{\overline{N}}_{(2}(r, f) + \overline{\overline{N}}\left(r, \frac{1}{h-1}\right)$$

$$+ N_0\left(r, \frac{1}{h'}\right) + m\left(r, \frac{g'}{g}\right) + \log\left|\frac{g(0)}{g'(0)}\right|. \quad (4.55)$$

而由（4.52）与（4.55），有

$$\overline{N}(r, f) = N_{1)}(r, f) + \overline{N}_{(2}(r, f)$$

$$\leqslant 3N\left(r, \frac{1}{\varphi}\right) + N(r, \varphi) + 3\overline{N}\left(r, \frac{1}{h-1}\right)$$

$$+ 2N\left(r, \frac{1}{f}\right) + 2m\left(r, \frac{h}{f}\right) + 2m\left(r, \frac{h'}{f}\right)$$

$$+ 2m\left(r, \frac{h'}{h-1}\right) + m\left(r, \frac{g'}{g}\right) + \log\left|\frac{g(0)}{g'(0)}\right|.$$

再结合（4.51），即得

$$T(r, f) \leqslant 4N\left(r, \frac{1}{\varphi}\right) + N(r, \varphi) + 3N\left(r, \frac{1}{f}\right)$$

$$+ 4\overline{\overline{N}}\left(r, \frac{1}{h-1}\right) + 3m\left(r, \frac{h}{f}\right) + 3m\left(r, \frac{h'}{f}\right)$$

$$+ 3m\left(r, \frac{h'}{h-1}\right) + \log\left|\frac{h(0)-1}{h'(0)}\right| + \log|f(0)| + \log 2$$

$$+ m\left(r, \frac{g'}{g}\right) + \log\left|\frac{g(0)}{g'(0)}\right|. \tag{4.56}$$

最后再应用定理1.13′及引理2.3、引理2.5，就可得（4.50）式.

引理4.6 设$f(z)$、$\varphi(z)$于$|z|\leqslant 1$亚纯，置

$$n(1, f=0) + n(1, f^{(k)}=\varphi) = N,$$

$$n(1, f) = N', \quad n(1, \varphi) + n\left(1, \frac{1}{\varphi}\right) = N''.$$

又设存在正数$H(\geqslant 1)$及一组个数不超过N''的圆$(\gamma)_1$，其直径之和$\leqslant \frac{1}{1024}$，使当$z\overline{\in}(\gamma)_1$，$|z|\leqslant\frac{1}{2}$时，

$$\prod_{\substack{f(a)=0,\ \infty \\ |a|\leqslant 1}} \frac{1}{|z-a|} \leqslant (4096)^{N''},$$

$$\max\left\{\left|\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|, \ \log|\varphi|, \ \log\left|\frac{1}{\varphi}\right|\right\} \leqslant \log H. \tag{4.57}$$

则存在点z_0与ζ：$|z_0|<\frac{3}{64}$，$|\zeta|<\frac{3}{64}$，其中z_0到$f(z)$在$|z|\leqslant 1$上的极点的距离均大于$\frac{1}{1024(N'+1)}$，使对一切复数a，有

$$n\left(\frac{1}{64}, f=a\right) \leqslant K\Big\{(N+N'')\log(N+N'+2) + 1$$

$$+ \log^+\log^+|f(z_0)| + \log H + \log\frac{1}{|f(\zeta)-a|}\Big\}. \tag{4.58}$$

证明 在圆$|z|\leqslant 1$上以$f(z)$的每个零点及$f^{(k)}-\varphi$的每个零点为心，$\frac{1}{1024(N+1)}$为直径作圆，其全体记为$(\gamma)_2$，以$f(z)$的每个极点为心，$\frac{1}{1024(N'+1)}$为直径作圆，其全体记为$(\gamma)_3$. 置

$$(\gamma)=(\gamma)_1+(\gamma)_2+(\gamma)_3.$$

(γ)中一切圆的直径总和$\leqslant\frac{1}{256}$.

取z_0：$|z_0|<\frac{1}{64}$使$z_0\overline{\in}(\gamma)$. 显然，存在正数$r_1$和$r_2$，使

$$\frac{5}{128}\leqslant r_1<r_2\leqslant\frac{6}{128},\qquad r_2-r_1=\frac{1}{256(N+N^{\nu}+1)},$$

且圆环D：$r_1\leqslant|z-z_0|\leqslant r_2$满足$D\cap\Big((\gamma)_1\cup(\gamma)_2\Big)=\phi$.

令$h(z)=\frac{f^{(k)}}{\varphi(z)}$. 我们区分两种情形：

（1） 在D上恒有

$$|f(z)|+|f'(z)|+\cdots+|f^{(k-1)}(z)|+|h(z)|$$
$$+|h'(z)|>\frac{H}{12}.$$

于是，对于$r_1\leqslant r<\rho<r_2$，有

$$m\left(r,z_0,\frac{1}{f}\right)\leqslant K\left\{\sum_{j=1}^{k+1}m\left(r,z_0,\frac{f^{(j)}}{f}\right)+\log^+H+1\right\}$$

另外，

$$N\left(r,z_0,\frac{1}{f}\right)\leqslant\log\prod_{\substack{f(a)=0\\|a-z_0|\leqslant r}}\frac{1}{|a-z_0|}$$
$$\leqslant N\log\Big(1024(N+1)\Big).$$

故当$r_1\leqslant r<\rho<r_2$时，

$$T\left(r,z_0,\frac{1}{f}\right)<K\left\{N\log(N+1)+N+1+\log^+\frac{1}{\rho-r}\right.$$

$$+\log^+\log^+\frac{1}{|f(z_0)|}+\log^+H$$

$$+\log^+T(\rho, z_0, f)\Big\}.$$

再应用引理2.3，引理2.5及Jensen公式（1.19），就得

$$T\left(\frac{5}{128}, z_0, f\right)\leqslant\log^+|f(z_0)|+K\Big\{N\log(N+1)+N+1$$

$$+\log H+\log^+\log^+|f(z_0)|\Big\}.$$

于是

$$n\left(\frac{1}{64}, f=a\right)\leqslant n\left(\frac{1}{32}, z_0, f=a\right)$$

$$\leqslant\left(\log\frac{5}{4}\right)^{-1}T\left(\frac{5}{128}, z_0, \frac{1}{f-a}\right)$$

$$<K\Big\{N\log(N+1)+N+1+\log H$$

$$+\log\frac{1}{|f(z_0), a|}+\log^+\log^+|f(z_0)|\Big\}.$$

（2） 在D上存在一点z_1使

$$|f(z_1)|+|f'(z_1)|+\cdots+|f^{(k-1)}(z_1)|+|h(z_1)|$$

$$+|h'(z_1)|\leqslant\frac{1}{12H}.$$

此时，再区分两种情形：

(2.1) 在D上存在一点z_2使

$$|h'(z_2)|\geqslant\frac{1}{4}.$$

在D上作长度$\leqslant\frac{1}{6}$的曲线$\widehat{z_1z_2}$. 显然，存在z_1^*，$z_2^*\in\widehat{z_1z_2}$，

z_1^*介于z_1与z_2^*之间，使

$$|h'(z_1^*)|=\frac{1}{12H},\ |h'(z_2^*)|=\frac{1}{4},$$

$$|h'(z)|\leqslant\frac{1}{4}\quad (z\in\widehat{z_1z_2^*}),$$

$$\frac{1}{12H}\leqslant|h'(z)|\leqslant\frac{1}{4}\quad (z\in\widehat{z_1^*z_2^*}). \tag{4.59}$$

再注意到$\widehat{z_1^*z_2^*}$的长度$\leqslant\frac{1}{6}$，那么存在点$\zeta\in\widehat{z_1^*z_2^*}$使

$$\left|\frac{h''(\zeta)}{h'(\zeta)}\right|\geqslant\left|\int_{\widehat{z_1^*z_2^*}}\frac{h''(t)}{h'(t)}dt\right|$$

$$\geqslant\log|h'(z_1^*)|-\log|h'(z_2^*)|=\log(3H)). \tag{4.60}$$

另外，

$$|h(z)|\leqslant|h(z_1)|+\left|\int_{\widehat{z_1z}}h'(t)dt\right|$$

$$<\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}<\frac{1}{6}\quad (z\in\widehat{z_1z_2^*}). \tag{4.61}$$

故

$$|f^{(k)}(z)|<\frac{H}{6}\quad (z\in\widehat{z_1z_2^*}).$$

再通过逐次积分，有

$$|f(\zeta)|<H+1. \tag{4.62}$$

由（4.59），（4.60），（4.61）及（4.62），有

$$\left|\frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta)}+(k+2)\frac{h'(\zeta)}{h(\zeta)-1}-(k+1)\frac{h''(\zeta)}{h'(\zeta)}\right|$$

$$>(k+1)\log(3H)-\log H-(k+2)\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{6}}$$

$$>(k+1)-\frac{k+2}{2}\geqslant\frac{1}{2}. \tag{4.63}$$

再取正数r^*：$\frac{6}{16}<r^*<\frac{7}{16}$，使

$$(|z-\zeta|=r^*)\cap(\gamma)_1=\phi.$$

于是结合（4.57），有

$$N\left(r^*,\zeta,\frac{1}{f}\right)+N\left(r^*,\zeta,\frac{1}{h-1}\right)$$

$$\leqslant N\left(r^*,\zeta,\frac{1}{f}\right)+N\left(r^*,\zeta,\frac{1}{f^{(k)}-\varphi}\right)+N(r^*,\zeta,\varphi)$$

$$\leqslant N\log\Big(4096(N+1)\Big)+N''\log(8192e).$$

另外，

$$T(r^*,\zeta,\varphi)\leqslant\log H+N''\log(8192e),$$

$$T(r^*,\zeta,\varphi')\leqslant m\left(r^*,\zeta,\frac{\varphi'}{\varphi}\right)+m(r^*,\zeta,\varphi)+2N(r^*,\zeta,\varphi)$$

$$\leqslant 2\log H+2N''\log(8192e).$$

这样，应用引理4.5于圆：$|z-\zeta|\leqslant r^*$，有

$$T\left(\frac{1}{8},\zeta,f\right)<K\left\{N\log(N+1)+N''+1+\log H\right\}.$$

故

$$n\left(\frac{1}{64},f=a\right)\leqslant n\left(\frac{1}{16},\zeta,f=a\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{\log 2}T\left(\frac{1}{8},\zeta,\frac{1}{f-a}\right)$$

$$<K\left\{N\log(N+1)+N''+\log H+1\right.$$
$$\left.+\log\frac{1}{|f(\zeta),a|}\right\}.$$

(2.2) 在D上恒有$|h'(z)|<\frac{1}{4}$. 于是

$$|h(z)|<\frac{1}{12H}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}<\frac{1}{6}\qquad(z\in D).$$

故

$$\left|\frac{h'(z)}{h(z)-1}\right|<\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{6}}<\frac{1}{3}\qquad(z\in D).\qquad(4.64)$$

另外，由 $|f^{(k)}(z)|<\frac{H}{6}$ $(z\in D)$，并通过积分，可得

$$|f(z)|<H+1\quad(z\in D).\qquad(4.65)$$

由（4.64）知

$$n(r_1,\ z_0,\ h)=n\left(r_1,\ z_0,\ \frac{1}{h-1}\right),$$

因而

$$n(r_1,z_0,f)\leqslant n(r_1,z_0,f^{(k)})\leqslant n(r_1,z_0,h)+n(r_1,z_0,\varphi)$$
$$=n\left(r_1,z_0,\frac{1}{h-1}\right)+n(r_1,z_0,\varphi)$$
$$\leqslant n\left(r_1,z_0,\frac{1}{f^{(k)}-\varphi}\right)+2n(r_1,z_0,\varphi)$$
$$\leqslant N+2N''.$$

故

$$N(r_1,z_0,f)\leqslant(N+2N'')\log\left(1024(N'+1)\right).$$

于是，结合（4.65）式，就有

$$T(r_1, z_0, f) < K\left\{(N+N'')\log(N'+2)+1+\log H\right\}.$$

也就有

$$n\left(\frac{1}{32}, f=a\right) < K\left\{(N+N'')\log(N'+2)+1+\log H + \log\frac{1}{|f(z_0), a|}\right\}$$

至此引理证毕.

下面来证定理4.8.

根据定理4.5，存在一条方向Δ：$\arg z=\theta_0$（$0\leqslant\theta_0<2\pi$），使对任意正数ε、任意三个开平面上级小于ρ的互为判别的亚纯函数$a_1(z)$，$a_2(z)$，$a_3(z)$，总有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\left(\sum_{i=1}^{3} n(r, \theta_0, \varepsilon, f=a_i(z))\right)}{\log r}=\rho.$$

我们要证方向Δ就具有定理所要求的性质．假若不对，即对某$\varepsilon>0$，某正整数k及级小于ρ的两个亚纯函数$a(z)$，$b(z)$，$b(z)-a^{(k)}(z)\not\equiv 0$，使当$r$充分大时，

$$n\left(r, \theta_0, \varepsilon, f=a(z)\right)+n\left(r, \theta_0, \varepsilon, f^{(k)}=b(z)\right)<r^{\tau}$$

$$(0<\tau<\rho).$$

置

$$g(z)=f(z)-a(z), \qquad \varphi(z)=b(z)-a^{(k)}(z),$$

则$g(z)$之级仍为ρ且方向Δ为$g(z)$的ρ级Borel方向．于是，根据定理4.4，存在一列充满圆

$$\Gamma_n: \ |z-z_n|<\varepsilon_n|z_n|, \ |z_{n+1}|>2|z_n|,$$

$$\arg z_n = \theta_0 \quad (n=1,2,\cdots),$$

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0 \text{ 且 } \varepsilon_n|z_n| > 1 \quad (n=1,2,\cdots),$$

使得在每个Γ_n内，$g(z)$取任意复数至少$|z_n|^{\rho-\eta_n}$次，至多除去一些复数可含于半径为δ_n的两个球面小圆S_n，S_n'内，其中$\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n = \lim\limits_{n\to\infty}\delta_n = 0$.

取Γ_n'：$|z-z_n|\leqslant 64\varepsilon_n|z_n|$. 当$n$充分大时，$\Gamma_n'$完全属于角域$|\arg z-\theta_0|<\varepsilon$内. 置

$$G(t)=\frac{g(z_n+64\varepsilon_n|z_n|t)}{(32\varepsilon_n|z_n|)^k},$$

$$\overline{\Phi}(t)=\varphi(z_n+64\varepsilon_n|z_n|t).$$

它们均于$|t|\leqslant 1$亚纯，且当n充分大时，

$$n\left(1,\frac{1}{G}\right)+n\left(1,\frac{1}{G^{(k)}-\overline{\Phi}}\right)<2|z_n|^{\tau}.$$

另外，根据定理4.1′，存在一组个数不超过

$$N''=n(1,\ \Phi)+n(1,\ \frac{1}{\Phi})$$

的圆$(\gamma)_1$，其直径总和$\leqslant\frac{1}{1024}$，使当$t\overline{\in}(\gamma)_1$时，

$$\prod_{\substack{\Phi(\tau)=0,\ \infty\\ |\tau|\leqslant 1}}\frac{1}{|t-\tau|}\leqslant(4096e)^{N''}, \tag{4.66}$$

$$\sum_{\substack{\Phi(\tau)=0,\ \infty\\ |\tau|\leqslant 1}}\frac{1}{|t-\tau|}\leqslant 4096N''(2\log N''+1). \tag{4.67}$$

令

$$z = z_n + 64\varepsilon_n |z_n| t,$$

则由Poisson-Jensen公式，有

$$\log|\Phi(t)| = \log|\varphi(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|\varphi(3|z_n|e^{i\theta})\right| \times \mathrm{Re}\left\{\frac{3|z_n|e^{i\theta}+z}{3|z_n|e^{i\theta}-z}\right\} d\theta$$

$$-\sum_{\substack{\varphi(\alpha)=0\\|\alpha|\leqslant 3|z_n|}} \log\left|\frac{(3|z_n|)^2-\bar{\alpha}z}{3|z_n|(z-\alpha)}\right| + \sum_{\substack{\varphi(\beta)=\infty\\|\beta|\leqslant 3|z_n|}} \log\left|\frac{(3|z_n|)^2-\bar{\beta}z}{3|z_n|(z-\beta)}\right|. \qquad (4.68)$$

由（4.68）还可导出

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|\varphi(3|z_n|e^{i\theta})\right| \frac{6|z_n|e^{i\theta}}{(3|z_n|e^{i\theta}-z)^2} d\theta$$

$$-\sum_{\substack{\varphi(\alpha)=0\\|\alpha|\leqslant 3|z_n|}} \frac{|\alpha|^2-(3|z_n|)^2}{(z-\alpha)((3|z_n|)^2-\bar{\alpha}z)} + \sum_{\substack{\varphi(\beta)=\infty\\|\beta|\leqslant 3|z_n|}} \frac{|\beta|^2-(3|z_n|)^2}{(z-\beta)\left((3|z_n|)^2-\bar{\beta}z\right)}. \qquad (4.69)$$

再令

$$a = z_n + 64\varepsilon_n |z_n| \tau,$$

其中a表示$\varphi(z)$的零点或极点，τ表示$\Phi(t)$的零点或极点，则当$|t|\leqslant\frac{1}{2}$，$t\bar{\in}(\gamma)_1$时，由（4.66）～（4.69）式，分别有如下估计：

$$
\begin{aligned}
|\log|\Phi(t)|| \leqslant & \sum_{\substack{|a|\leqslant 3|z_n| \\ |\tau|\leqslant 1}} \log\left|\frac{(3|z_n|)^2-\bar{a}z}{3|z_n|(z-a)}\right| \\
& + \sum_{\substack{|a|\leqslant 3|z_n| \\ |\tau|>1}} \log\left|\frac{(3|z_n|)^2-\bar{a}z}{3|z_n|(z-a)}\right| \\
& + 5\left\{m(3|z_n|,\ \varphi)+m\left(3|z_n|,\frac{1}{\varphi}\right)\right\} \\
\leqslant & \left\{n(3|z_n|,\ \varphi)+n\left(3|z_n|,\ \frac{1}{\varphi}\right)\right\} \\
& \times(2\log|z_n|+\log 4096e) \\
& + 5\left\{m(3|z_n|,\ \varphi)+m\left(3|z_n|,\frac{1}{\varphi}\right)\right\}. \quad (4.70)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}\right| = & \left|\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right| \cdot 64\varepsilon_n|z_n| \\
\leqslant & 6\left\{m(3|z_n|,\varphi)+m\left(3|z_n|,\frac{1}{\varphi}\right)\right\} \\
& + 6\sum_{\substack{|a|\leqslant 3|z_n| \\ |\tau|\leqslant 1}} \frac{1}{|t-\tau|} + 6\sum_{\substack{|a|\leqslant 3|z_n| \\ |\tau|>1}} \frac{1}{|t-\tau|} \\
\leqslant & 6\left\{m(3|z_n|,\ \varphi)+m\left(3|z_n|,\ \frac{1}{\varphi}\right)\right\} \\
& + 6\times 4096\left\{n(3|z_n|,\ \varphi)+n\left(3|z_n|,\frac{1}{\varphi}\right)\right\} \\
& \times\left\{2\log\left[n(3|z_n|,\ \varphi)+n\left(3|z_n|,\frac{1}{\varphi}\right)\right]+2\right\}.
\end{aligned}
$$

应用引理 1.6 于 $G(t)$ 及 $\Phi(t)$，其中取 (4.17)

$$
\log H = 6\left\{m(3|z_n|,\varphi)+m\left(3|z_n|,\frac{1}{\varphi}\right)\right\}
$$

$$+6\times 4096\left\{n(3|z_n|,\varphi)+n\left(3|z_n|,\frac{1}{\varphi}\right)\right\}$$

$$\times\left\{2\log\left[n(3|z_n|,\ \varphi)+n\left(3|z_n|,\frac{1}{\varphi}\right)\right]\right.$$

$$\left.+2\log|z_n|+3+\log 4096\right\},\tag{4.72}$$

则存在点t_0与t'：$|t_0|<\frac{3}{64}$，$|t'|<\frac{3}{64}$，t_0到$G(t)$在$|t|\leqslant 1$的极点的距离均大于$\frac{1}{1024\left[n(1,G)+1\right]}$，使对一切复数$a$，有

$$n(\Gamma_n,\ g=a)=n\left(\frac{1}{64},\quad G=\frac{a}{(64\varepsilon_n|z_n|)^k}\right)$$

$$<K\left\{\left[2|z_n|^\tau+n(3|z_n|,\varphi)+n\left(3|z_n|,\frac{1}{\varphi}\right)\right]\right.$$

$$\times\log\left(2|z_n|^\tau+n(3|z_n|,\ g)+2\right)+1$$

$$+\log^+\log^+|G(t_0)|+\log H$$

$$\left.+\log\frac{1}{\left|G(t'),\ \frac{a}{(64\varepsilon_n|z_n|)^k}\right|}\right\}.\tag{4.73}$$

不难看出，

$$\log H=O\left(T(4|z_n|,\varphi)\log\left[|z_n|T(4|z_n|,\varphi)\right]\right).$$

另外，应用Poisson-Jensen公式并注意到t_0的性质，则有

$$\log^+\log^+|G(t_0)|=O\left(\log\left[|z_n|T(4|z_n|,g)\right]\right).$$

而

$$\log\frac{1}{\left|G(t'),\ \frac{a}{(64\varepsilon_n|z_n|)^k}\right|}=\log\frac{1}{\left|\frac{g(\zeta)}{(64\varepsilon_n|z_n|)^k},\ \frac{a}{(64\varepsilon_n|z_n|)^k}\right|}$$

$$\leqslant \log(64\varepsilon_n|z_n|)^t + \log\frac{1}{|g(\zeta), a|},$$

其中$\zeta = z_n + 64\varepsilon_n|z_n|i^t$. 于是，由（4.73）可知，当$n$充分大时，至多除去一个球面半径为$e^{-|z_n|^\tau}$的小圆$S_n''$后，对于一切复数$a$，有

$$n(\Gamma_n, g=a) < |z_n|^{\tau_1} \quad (\tau < \tau_1 < \rho).$$

因S_n，S_n'与S_n''的球面半径均趋于零，故当n充分大时，就存在复数$a_n \overline{\in} S_n \cup S_n' \cup S_n''$. 故有

$$|z_n|^{\rho - \eta_n} < |z_n|^{\tau_1},$$

即$\rho - \eta < \tau_1$. 由此得$\rho \leqslant \tau_1$，从而矛盾. 至此定理4.8证毕.

陈怀惠[3]还把定理4.7中的$f^{(k)}$改为$f^{(k)} + P(f)$的情形，其中P为一类多项式. 有兴趣的读者请参阅其原文.

对于上一章最后一节所给出的三个正规定则（定理3.22、3.23及3.24），是否都存在相应的奇异方向？对于第一问题，目前还没有解决. 第二、第三个问题最近已为龚向宏[1]所解决，但对第三个问题他作了$b \neq 0$的限制.

定理4.9 设$f(z)$为开平面上ρ（$0 < \rho < +\infty$）级亚纯函数，则存在一条由原点出发的半直线Δ：$\arg z = \theta_0$（$0 \leqslant \theta_0 < 2\pi$），使得对任意正数$\varepsilon$，任意正整数$n$（$n \geqslant 5$）及任意两个有穷非零复数$a$，$b$，均有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log n(r, \theta_0, \varepsilon, f' - af^n = b)}{\log r} = \rho.$$

为了证明定理，我们先建立两个引理.

引理4.7 设$\varphi(z)$（$\not\equiv 0$）为开平面上级不超过ρ的亚纯函

数，η（<1）为任一正数．则存在仅依赖于$\varphi(z)$的正数R（>1），使得对任意有穷复数z_0，$|z_0|>R$，都存在一组半径总和不超过$\frac{\eta|z_0|}{1000}$的圆(γ)，当$z\overline{\in}(\gamma)$且$|z-z_0|<\eta|z_0|$时，

$$\left|\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|<\frac{1}{\eta}|z_0|^{\rho+1}.$$

证明　设

$$N=n(3|z_0|,\ \varphi)+n\left(3|z_0|,\ \frac{1}{\varphi}\right).$$

根据定理4.1′，存在一组圆(γ)，其半径总和不超过$\frac{\eta|z_0|}{1000}$，使得当$z\overline{\in}(\gamma)$时，

$$\sum_{\substack{f(a)=0,\ \infty\\ |a|\leqslant 3|z_0|}}\frac{1}{|z-a|}<\frac{2000N}{\eta|z_0|}(2\log N+1).$$

再应用引理1.4，当$z\overline{\in}(\gamma)$且$|z-z_0|<\eta|z_0|$时，

$$\left|\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|<3\left\{m(3|z_0|,\varphi)+m\left(3|z_0|,\frac{1}{\varphi}\right)\right\}$$

$$+\frac{18|z_0|^2}{9|z_0|^2-3|z_0|\cdot 2|z_0|}\cdot\frac{2000N}{\eta|z_0|}(2\log N+1)$$

不难看出，存在仅依赖于φ的正数R（>1），只要$|z_0|>R$，上式右端就小于

$$\frac{1}{\eta}|z_0|^{\rho+1}.$$

引理4.8　设$f(z)$为开平面上ρ（$0<\rho<+\infty$）级亚纯函数，η（<1）为任一正数，b为任一有穷非零复数，n为不小于5的

正整数. 则存在一仅依赖于f, n及b的正数R（<1），使当$|z_0|>R$时，存在点z^*，对于任意复数a，均有

$$n\left(\frac{\eta|z_0|}{32}, z_0, f=a\right)<K\left\{N\log\frac{2}{\eta}+\log^+|z_0|+\log^+|b|\right.$$

$$\left.+\log^+\frac{1}{|b|}+\log\frac{1}{|f(z^*), a|}\right\},$$

(4.74)

其中$N=n(\eta|z_0|, z_0, f'-b-f^n=0)+1$.

证明 置

$$\Psi(z)=\frac{f'-b}{f^n},$$

则$\Psi(z)$之级不超过ρ. 根据引理4.7，存在一仅依赖于f, n及b的正数R（>1），当$|z_0|>R$时，存在一组圆$(\gamma)_1$，其半径总和不超过$\frac{\eta|z_0|}{1000}$，当$z\bar{\in}(\gamma)_1$及$|z-z_0|<\eta|z_0|$时

$$\left|\frac{f'}{f}\right|+\left|\frac{\Psi'}{\Psi-1}\right|+\left|\frac{\Psi'}{\Psi}\right|+\left|\frac{f''}{f'-b}\right|<\frac{16}{\eta}|z_0|^{\rho+1} \quad (4.75)$$

以$\Psi(z)-1$在$|z-z_0|\leqslant\eta|z_0|$的零点作 Boutroux-Cartan 除外圆$(\gamma)_2$，其半径总和不超过$\frac{\eta|z_0|}{1000}$. 以$f(z)$在$|z-z_0|\leqslant\frac{\eta|z_0|}{25}$上的零点与极点分别作半径总和均不超过$\frac{\eta|z_0|}{1000}$的 Boutrux-Cartan除外圆$(\gamma)_3$与$(\gamma)_4$. 再取点$z_1$满足

$$z_1\bar{\in}\bigcup_{j=1}^{4}(\gamma)_j, \qquad |z_1-z_0|\leqslant\frac{\eta|z_0|}{50},$$

取数h满足

$$\frac{\eta|z_0|}{8}<h<\frac{\eta|z_0|}{7},\qquad (|z-z_1|=h)\cap\left(\bigcup_{j=1}^{4}(\gamma)_j\right)=\phi.$$

又令

$$H=\frac{16}{\eta}|z_0|^{c+1}.$$

我们区分两种情形：

（1）　在圆$|z-z_1|=h$上，恒有

$$|\Psi(z)|\leqslant 4|z_0|H.$$

此时，

$$\left|\frac{1}{f}\right|\leqslant\frac{1}{4|b|H}|f|^{n-1}+\frac{1}{|b|}\frac{f'}{f}.$$

于是，由（4.75）式知，在$|z-z_0|=h$上，恒有

$$\left|\frac{1}{f(z)}\right|\leqslant 1+\frac{1}{4|b|H}+\frac{1}{|b|}H. \tag{4.76}$$

我们再区分两种情形：

（1.1）　在圆$|z-z_1|=h$上存在一点z'，使

$$\left|\frac{\Psi'(z')}{\Psi(z')-1}\right|\geqslant\frac{1}{|z_0|}.$$

于是$\Psi'(z)\not\equiv 0$．故在圆$|z-z_1|=h$上存在一点z^*，使

$$\Psi'(z^*)\neq 0;\ \Psi(z^*)\neq 0,\ 1,\ \infty;\ f(z^*)\neq 0,\ \infty;$$

$$\left|\frac{\Psi'(z^*)}{\Psi(z^*)-1}\right|\geqslant\frac{1}{2|z_0|}. \tag{4.77}$$

取r：$\dfrac{\eta|z_0|}{3}<r<\dfrac{\eta|z_0|}{2}$，使

$$(|z-z^*|=r)\cap\left(\bigcup_{j=1}^{4}(\gamma)_j\right)=\phi.$$

因$(|z-z^*|\leqslant r)\subset(|z-z_0|<\eta|z_0|)$，故

$$n(r, z^*, \Psi = 1) \leqslant n(\eta|z_0|, z_0, \Psi = 1)$$
$$\leqslant n(\eta|z_0|, z_0, f' - b - f^n = 0) \leqslant N.$$

再计及$z^* \overline{\in} (\gamma)_2$，而有

$$N\left(r, z^*, \frac{1}{\Psi - 1}\right) \leqslant N \log\left(\frac{2000e}{\eta|z_0|}\right).$$

应用引理3.12并结合（4.75），（4.76）及（4.77）式，得

$$T(r, z^*, f) \leqslant K\left\{N \log\frac{2}{\eta} + \log^+|z_0| + \log^+\frac{1}{|b|}\right\}.$$

而$\left(|z - z_0| \leqslant \frac{\eta|z_0|}{32}\right) \subset \left(|z - z^*| < \frac{2}{7}\eta|z_0|\right)$，于是

$$n\left(\frac{\eta|z_0|}{32}, z_0, f = a\right) \leqslant n\left(\frac{2}{7}\eta|z_0|, z^*, f = a\right)$$
$$\leqslant \frac{1}{\log\frac{7}{6}} N\left(r, z^*, \frac{1}{f - a}\right)$$
$$\leqslant \frac{1}{\log\frac{7}{6}} \cdot T\left(r, z^*, \frac{1}{f - a}\right)$$
$$\leqslant K\left\{N \log\frac{2}{\eta} + \log^+|z_0|\right.$$
$$\left. + \log^+\frac{1}{|b|} + \log\frac{1}{|f(z^*), a|}\right\}.$$
$$(4.78)$$

（1.2）　在圆$|z - z_1| = h$上，恒有

$$\left|\frac{\Psi'(z)}{\Psi(z) - 1}\right| < \frac{1}{|z_0|}.$$

此时由幅角原理知

$$\left|n(h, z_1, \Psi) - n\left(h, z_1, \frac{1}{\Psi - 1}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{|z-z_1|=h}\frac{\Psi'(z)}{\Psi(z)-1}dz\right| < 1$$

于是，

$$n(h,z_1,f=0)\leqslant n(h,z_1,\Psi)+n(h,z_1,f'-b-f^n=0)$$

$$= n\left(h,z_1,\frac{1}{\Psi-1}\right)+n(h,z_1,f'-b-f^n=0)$$

$$\leqslant 2N.$$

下面再估计$N\left(h,z_1,\frac{1}{f}\right)$. 因$z_1\overline{\in}(\gamma)_3$，故若令

$$p=n\left(\frac{\eta|z_0|}{25},\ z_0,\ f=0\right),\ 则$$

$$\prod_{f(a)=0,\ |a-z_0|\leqslant\frac{\eta|z_0|}{25}}\frac{h}{|z_1-a|}\leqslant\left(\frac{2000eh}{\eta|z_0|}\right)^p.$$

而

$$\prod_{\substack{f(a)=0\\ |a-z_0|>\frac{\eta|z_0|}{25},\ |a-z_1|<h}}\frac{h}{|z_1-a|}\leqslant\left(\frac{h}{\frac{\eta|z_0|}{25}-\frac{\eta|z_0|}{50}}\right)^{n(h,z_1,f=0)-p}$$

于是

$$N\left(h,z_1,\frac{1}{f}\right)=\log\prod_{f(a)=0,\ |a-z_1|<h}\frac{h}{|z_1-a|}$$

$$\leqslant n(h,z_1,f=0)\log\frac{2000e}{\eta}$$

$$\leqslant\left(2\log\frac{2000e}{\eta}\right)N. \tag{4.79}$$

另外，由（4.76）式，有

$$m\left(h, z_1, \frac{1}{f}\right) < K\left\{1 + \log\frac{2}{\eta} + \log^+|z_0| + \log^+\frac{1}{|b|}\right\}.$$

因而

$$T\left(h, z_1, \frac{1}{f}\right) < K\left\{N\log\frac{2}{\eta} + \log^+|z_0| + \log^+\frac{1}{|b|}\right\}.$$

由此即可得（4.74）式.

（2） 在圆 $|z-z_1|=h$ 上存在一点 z_2，使

$$|\Psi(z_2)| > 4|z_0|H. \tag{4.80}$$

此时又区分两种情形：

（2.1） 在圆 $|z-z_1|=h$ 上，恒有

$$\left|\frac{1}{\Psi(z)}\right| \leqslant \frac{1}{2|z_0|H}. \tag{4.81}$$

这时，由（4.75）与（4.81）式，在 $|z-z_1|=h$ 上，恒有

$$\left|\left(\frac{1}{\Psi(z)}\right)'\right| = \left|\frac{1}{\Psi(z)}\right|\left|\frac{\Psi'(z)}{\Psi(z)}\right| < \frac{1}{2|z_0|H}\cdot H = \frac{1}{2|z_0|}.$$

故

$$\left|\frac{\left(\frac{1}{\Psi(z)}\right)'}{\frac{1}{\Psi(z)} - 1}\right| < \frac{1}{|z_0|}.$$

于是，由幅角原理，有

$$n(h, z_1, \Psi=0) = n(h, z_1, \Psi=1).$$

再仿照证（4.79）式的方法，有

$$N(h, z_1, f) \leqslant \left(\log\frac{2000eh}{\eta}\right)N. \tag{4.82}$$

另外，由（4.81）式，当 $|z-z_1|=h$ 时，恒有

$$\left|\frac{f^n}{f'-b}\right| \leqslant \frac{1}{2|z_0|H}.$$

由此得

$$|f| \leqslant \left\{\frac{1}{2|z_0|H}\left(\left|\frac{f'}{f}\right| + \left|\frac{b}{f}\right|\right)\right\}^{\frac{1}{n-1}}.$$

于是，在$|z-z_1|=h$上，恒有

$$|f(z)| \leqslant 1 + \left\{\frac{1}{2|z_0|H}\left(\left|\frac{f'}{f}\right| + |b|\right)\right\}^{\frac{1}{n-1}}.$$

再由（4.75）式知

$$|f(z)| < 2 + |b|.$$

也就有

$$m(h, z_1, f) < \log(2 + |b|).$$

结合（4.82）式，得

$$T(h, z_1, f) < K\left\{N\log\frac{2}{\eta} + \log^+|b|\right\}.$$

由此即可得（4.74）式.

（2.2）　在圆$|z-z_1|=h$上存在一点z_3，使

$$\left|\frac{1}{\Psi(z_3)}\right| > \frac{1}{2|z_0|H}.$$

于是，在圆$|z-z_1|=h$上存在点z_4与z_5，使

$$\begin{aligned}\frac{1}{4|z_0|H} = \left|\frac{1}{\Psi(z_4)}\right| &\leqslant \left|\frac{1}{\Psi(z)}\right| \\ &\leqslant \left|\frac{1}{\Psi(z_5)}\right| = \frac{1}{2|z_0|H} \quad (z \in \widehat{z_4 z_5}),\end{aligned} \tag{4.83}$$

其中$\widehat{z_4 z_5}$表示圆周$|z-z_1|=h$上，介于z_4与z_5间的长度较小的弧.因此存在一点$z^* \in \widehat{z_4 z_5}$，使

$$\left(\frac{1}{\Psi(z)}\right)'_{z=z^*} \geqslant \frac{\left|\frac{1}{\Psi(z_5)}-\frac{1}{\Psi(z_4)}\right|}{\frac{\pi}{7}\eta|z_0|}$$

$$>\frac{7}{\pi|z_0|}\cdot\frac{1}{4|z_0|H}. \tag{4.84}$$

于是由（4.83）及（4,84）式有

$$\left|\frac{\Psi(z^*)-1}{\Psi'(z^*)}\right| = \left|\frac{\Psi^2(z^*)}{\Psi'(z^*)}\right|\left|\frac{1}{\Psi(z^*)}-\frac{1}{\Psi^2(z^*)}\right|$$

$$<\frac{4\pi|z_0|^2 H}{7}\left(\frac{1}{2|z_0|H}+\frac{1}{4|z_0|^2H^2}\right)$$

$$<\frac{3\pi}{7}|z_0|^2 H. \tag{4.85}$$

另外，仿照证（4.75）式的方法，由（4.83）式有

$$\left|\frac{1}{f(z^*)}\right| \leqslant 1+\frac{1}{4|b|H}+\frac{1}{|b|}H. \tag{4.86}$$

再取r：$\frac{\eta|z_0|}{3}<r<\frac{\eta|z_0|}{2}$使 $(|z-z^*|=r)\cap\left(\bigcup_{j=1}^{4}(\gamma)_j\right)=\phi$

类似于情形（1.1）的讨论，有

$$n(r,z^*,\Psi=1)\leqslant N,$$

$$N\left(r,z^*,\frac{1}{\Psi-1}\right)\leqslant N\log\left(\frac{2000e}{\eta|z_0|}\right).$$

应用引理3.12，并结合（4.84），(4.85)及（4.86）式，得

$$T(r,z^*,f)<K\left\{N\log\frac{2}{\eta}+\log^+|z_0|+\log^+\frac{1}{|b|}\right\}.$$

由此就可导出（4.74）式．至此引理证毕．

现在来证定理4.9．由于

$$f'-af^n=a^{-\frac{1}{n-1}}\{(a^{\frac{1}{n-1}}f)'-(a^{\frac{1}{n-1}}f)^n\},$$

故不妨设$a=1$．设Δ: $\arg z=\theta_0$（$0\leqslant\theta_0<2\pi$）为$f(z)$的一条ρ级Borel方向．以下我们证明方向Δ就具有定理4.9中所要求的性质．假若不对，即存在正数ε，正整数n（$\geqslant 5$）及有穷非零复数b，使当r充分大时，

$$n(r,\theta_0,\varepsilon,f'-f^n-b=0)<r^\tau \quad (0<\tau<\rho). \tag{4.87}$$

根据定理4.4，存在一列充满圆

$$\Gamma_n:\ |z-z_n|<\varepsilon_n|z_n|,\quad |z_{n+1}|>2|z_n|,$$
$$\arg z_n=\theta_0\quad (n=1,2\cdots),\quad \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0,$$

使在每个Γ_n内，$f(z)$取任意复数至少$|z_n|^{\rho-\eta_n}$次，至多除去一些复数可含于半径为δ_n的两个球面小圆S_n，S_n'内，其中$\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n=\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n=0$．

取数η: $0<\eta<1$，使

$$(|z-z_n|\leqslant\eta|z_n|)\subset(|\arg z-\theta_0|<\varepsilon)\quad (n=1,2,\cdots)$$

由（4.87）式，当n充分大时，

$$n(\eta|z_n|,\ z_n,\ f'-f^n-b=0)<2|z_n|^\tau.$$

设R（>1）为引理4.8中的正数．应用引理4.8，当n充分大时，对任意复数a，有

$$n(\Gamma_n,\ f=a)\leqslant n\left(\frac{\eta}{32}|z_n|,\ z_n,\ f=a\right)$$
$$<K\left\{2|z_n|^\tau\log\frac{2}{\eta}+\log^+|z_n|+\log^+|b|\right.$$
$$\left.+\log^+\frac{1}{|b|}+\log\frac{1}{[f(z^*),a]}\right\}$$

故当n充分大后，至多除去一个球面半径为$e^{-|z_n|^\tau}$的小圆S_n''后，对一切复数a，恒有

$$n(\Gamma_n, f=a)<|z_n|^{\tau_1} \quad (\tau<\tau_1<\rho).$$

于是，当n充分大时，

$$|z_n|^{\rho-\eta_n}<|z_n|^{\tau_1}.$$

由此得$\rho\leqslant\tau_1$，从而矛盾．这就证明了定理4.9.

定理4.10 设$f(z)$为$\rho(0<\rho<+\infty)$级整函数，则存在一条由原点出发的半直线Δ：$\arg z=\theta_0$（$0\leqslant\theta_0<2\pi$），使得对于任意正数ε，任意正整数$n(\geqslant 3)$及任意两个有穷复数a（$\neq 0$）与b，均有

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log n(r,\theta_0,\varepsilon,f'-af^n=b)}{\log r}=\rho.$$

证明 设Δ：$\arg z=\theta_0$为$f(z)$的一条ρ级Borel方向．下面指出Δ即满足定理的要求．不失一般性，我们仍设$a=1$．当$b\neq 0$时，只需在定理4.9的证明过程中应用引理3.12时，用（3.103）式代替（3.102）式即可．当$b=0$时，令

$$g=-\frac{1}{(n-1)f^{n-1}}.$$

显然g之级仍为ρ，且Δ：$\arg z=\theta_0$仍为g的ρ级Borel方向．因此我们从定理4.7的证明过程可知，

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log\left\{n(r,\theta_0,\varepsilon,g=0)+n(r,\theta_0,\varepsilon,g'=1)\right\}}{\log r}=\rho$$

再注意到$g\neq 0$及

$$n(r,\theta_0,\varepsilon,g'=1)\leqslant n(r,\theta_0,\varepsilon,f^n-f'=0),$$

就有

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log n(r,\theta_0,\varepsilon,f'-f^n=0)}{\log r}=\rho.$$

至此定理证毕。

在本章结束时我们要指出两点[1]：一是关于奇异方向的存在性，仍有不少问题目前还未解决，特别是涉及导数与重值的亚纯函数的奇异方向的存在性问题至今还未有令人满意的工作．二是读者从上述各类奇异方向存在性的推导过程中已看到，我们都是证明Borel方向为这类奇异方向．因而自都会问，是否存在非Borel方向的其他类型的奇异方向？两答是肯定的．有兴趣的读者请参阅张庆僖和杨乐[1]。

1) 本章讨论的是有穷正级亚纯函数的奇异方向，至于零级等情形，近年来国内有不少深入的研究工作。

参考文献

Biernacki, M.

〔1〕Sur les direction de Borel des fonctions méromorphes, *Acta Math.*, 56 (1930), 197-204.

Borel, E.

〔1〕Sur les zéros des fonctions entières, *Acta Math.*, 20 (1897), 357-396.

Bureau, F.

〔1〕Mémoire sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé, *Memoires de la societe royale des sciences de Liege*, t. 17, 1932.

Cartan, H.

〔1〕Sur la fonction de croissance attachée à une fonction méromorphe de deux variables et ses applications aux fonctions méromorphes d'une variable, *C.R.Acad. Sci. Paris*, 189 (1929) 521-523.

〔2〕Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés lacunaires et leurs applications, *Ann. Ecole Norm. Sup.*, 45 (1928), 255-346.

陈怀惠

〔1〕与Hayman不等式相联系的奇异方向，数学进展，1987年第1期，73—79.

〔2〕一个正规定则，南京师范大学学报，4（1984），1—9.

〔3〕一个基本不等式及相应的奇异方向，数学年刊，1986年第3期，241—249.

庄圻泰

〔1〕Etude sur les familles normales et les familles quasi-normales des fonctions méromorphes, *Rendiconti Circolo Math. Palermo*, 62（1938），1-80.

〔2〕Un théoreme général sur les fonctions holomorphes dans le cercle unité et ses application, *Sci. Sinica*, 6（1957），（I）569-621；（II）757-831.

〔3〕亚纯函数的奇异方向，科学出版社（1982）.

Drasin, D.

〔1〕Normal families and the Nevanlinna theory, *Acta Math.*, 122（1969）231-263.

龚向宏

〔1〕亚纯函数及其微分多项式的奇异方向（待发表）

顾永兴

〔1〕关于亚纯函数正规族，中国科学，1978年第4期，373—384.

〔2〕亚纯函数族的一个正规定则，中国科学，1979年数学专辑（Ⅰ），267—274.

〔3〕关于全纯函数的正规族，数学学报，1980第1期，157—161.

〔4〕关于整函数及其各级导数的辐角分布，数学学报，28（1982），28—48.

顾永兴、龚向宏

〔1〕关于Hayman方向，中国科学，*A*辑1987年第10期，1019—1029.

Hayman, W.K.

〔1〕Picard values of meromorphic functions and their derivatives, *Ann. of Math.*, 70 (1959), 9-42.

〔2〕"*Research problems in function theory*", Athlone Press (Univ. of London), 1967.

Hess, A.

〔1〕Uber die Strukture von Schare meromorpher Funktionen Zurich, Lemann et Co., 1935.

熊庆来

〔1〕Sur les fonctions holomorphes dont les dérivées admettent une valeur exceptionnelle, *Ann. Ecole Norm. Sup.*, 72 (1955), 165-197.

〔2〕关于函数正规族论中蒙德耳—密朗达圈属，数学学报，1957年第1期，76—86.

熊庆来、何育赞

〔1〕Sur les valeurs multipes des fonctions méromorphes et de leurs dérivées, *Sci. Sinica*, 10 (1961); 267-285.

Langley, L.K.

〔1〕On normal families and a rest of Drasin, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*98 (1984), *no.* 3-4, 385-393.

李松鹰

〔1〕一类函数的正规定则，福建师大学报，1984年第1期，153—156.

李松鹰、谢晖春

〔1〕关于亚纯函数的正规族，数学学报，4 (1986)，468—476.

李先进

〔1〕关于正规族的Hayman猜想的证明，中国科学，*A*辑1985年第1期24—31.

Marty, F.

〔1〕Recherches sur la répartition des valeurs d'une fonction méromorphe, *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse*, 23 (1931), 183-261.

Milloux, H.

〔1〕Extension d'un théorème de M. R. Nevanlinna et applications, *Act. Scient. et Ind. no.* 888, 1940.

Miranda, C.

〔1〕Sur un nouveau critère de normalité pour les familles des fonctions holomorphes, *Bull. Sci. Math France*, 63 (1935), 185-196.

Montel, P.

〔1〕"*Lecons sur les familles normales de fonctions analytiques et leur applicaeions*", Coll. Borel, 1927.

Mues, E.

〔1〕Uber ein Problem von Hayman, *Math. Z.* 164, 239-259 (1979).

Nevanlinna, R.

"*Le theoreme de Picard-Borel et la theorie de fonctions meromorphes*", Coll. Borel, 1929.

ОШКИН, И.Б.

〔1〕Об Одном признаке нормальности семейств голоморфных функций, усп. Мат. Наук., 37 (1982). 221-222.

庞学诚

〔1〕Bloch原理和正规定则（待发表）

Rauch, A.

〔1〕Extensions de théorèmes relatifs aux directions de

Borel des fonctions méromorphes, *J. de Math.*, *t.* 12, 1934.

Schottky, F.

〔1〕Uber den Picardschen Satz und die Borelschen Ungleichungen, *S. B. Preuss, Akad. Wiss*, 1904, 1244-1263.

Valiron, G.

〔1〕Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes et de leurs dérivées, *Actualites Sc. et Ind.* 570 (1937).

〔2〕Directions de Borel des fonctions méromorphes, *Memor. Sci. Math.*, *fasc.* 89, *Paris*, 1938.

〔3〕Recherches sur le théorème de M. Borel dans la théorie des fonctions méromorphes, *Acta Math.*, 52 (1928), 67-92.

杨乐

〔1〕值分布论及其新研究，科学出版社，1982.

〔2〕正规族与微分多项式，中国科学，*A*辑，1983年 第 1 期. 21—32.

〔3〕亚纯函数族的正规性，中国科学，*A*辑，1986年第 9 期897—908.

〔4〕整函数与其导数的辐角分布和重值，中国科学，1979年第8期，731—751

杨乐、张广厚

〔1〕Recherches sur la normalité des familles de fonctions analytiques à des valeurs multiples, I. Un nouveau critère et quelques applications, *Sci. Sinica*, 14 (1965), 1258-1271; II. Géneralisations, *Ibid.* 15 (1966), 433-453.

Zalcman, L.

〔1〕 **A heuristic principle in complex funtion theory.** *Amer. Math. Monthly*, 82 (1975), 813-817.

张庆德、杨乐

〔1〕 亚纯函数的新奇异方向，中国科学，A辑，1982年第11期，982—994。

朱经浩

〔1〕 亚纯函数族的一个总的正规定则，科学通报，1986年第8期，171—177。